Tópicos de Matemática Discreta

Exame de Recurso

12/02/2014

1) $\varphi: ((p \to q) \vee (q \to r)) \to (p \to r)$

a)

p	q	r	$p\to q$	$q \to r$	$(p\to q)\vee(q\to r)$	$p \to r$	φ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Como φ não assume sempre o valor lógico de verdade, φ não é uma tautologia.
A afirmação é falsa.

b) A afirmação é equivalente a "Se $p \to q$ toma o valor lógico falso então φ toma o valor lógico verdadeiro."

Se $p \to q$ toma o valor lógico falso, sabemos que p toma o valor lógico verdadeiro e q o valor lógico falso. Esses casos correspondem às linhas 3 e 4 da tabela de verdade apresentada em a). Como podemos verificar na tabela, φ não tem de tomar o valor lógico verdadeiro.

Portanto, a afirmação é falsa.

2) a) $C = \{ x \in \mathbb{Z} : x^2 \in B \}$

$x^2 \in B \Leftrightarrow x^2 = 1 \vee x^2 = 2 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm 1 \vee x = \pm\sqrt{2} \vee x = \pm 2$

Como $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ e $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, segue-se que $C = \{-2, -1, 1, 2\}$.

b)

$$B \setminus C = \{x \mid x \in B \wedge x \notin C\}$$
$$= \{4\}$$

$$(B\setminus C) \times C = \{(x,y) \mid x \in B\setminus C \wedge y \in C\}$$
$$= \{(4,-2),(4,-1),(4,1),(4,2)\}.$$

c) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}\}$

O conjunto A é formado por todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ cujos elementos são todos pares excluindo $\emptyset$. Assim, $\{2\}, \{4\}, \{2,4\} \in A$.

Logo, $\mathcal{P}(B)\setminus A = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{1,2,4\}\}$.

3)

$$x \in (A\setminus B) \cup (A\cap B) \Leftrightarrow x \in A\setminus B \vee x \in A \cap B$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \wedge \underbrace{(x \notin B \vee x \in B)}_{\text{tautologia}}$$
$$\Leftrightarrow x \in A.$$

Logo, $(A\setminus B) \cup (A\cap B) = A$.

4) Seja $P(n)$ o predicado

$$2+5+8+\dots+(3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

sobre os elementos n de $\mathbb{N}$.

① $n=1$:

$$2+\dots+3n-1 = \frac{n(3n+1)}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2 = 2 \quad (V)$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira

② Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira (HI), ou seja

$$2+5+8+\cdots+(3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}.$$

Pretendemos mostrar que

$$2+5+8+\cdots+(3n-1)+(3(n+1)-1) = \frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2}.$$

Temos

$$2+5+8+\cdots+(3n-1)+(3(n+1)-1) \underset{HI}{=} \frac{n(3n+1)}{2} + 3(n+1)-1 =$$

$$= \frac{3n^2+n+6n+6-2}{2} = \frac{3n^2+7n+4}{2}.$$

Além disso, $\dfrac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(3n+4)}{2} = \dfrac{3n^2+7n+4}{2}.$

Portanto, $\mathcal{P}(n+1)$ é verdadeira.

Por ① e ②, pelo Princípio de Indução Natural, $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5)

a) $$f(\{1,2,4,6,8\}) = \{f(1), f(2), f(4), f(6), f(8)\}$$
$$= \left\{-1^2, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}\right\}$$
$$= \{-1, 1, 2, 3, 4\}$$

b) $$f^{\leftarrow}(\{-2\}) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = -2\} = \emptyset$$

$\frac{n}{2} = -2 \Leftrightarrow n = -4$ mas $-4 \notin \mathbb{N}$

$-n^2 = -2 \Leftrightarrow n^2 = 2 \Leftrightarrow n = \pm\sqrt{2}$ mas $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

$$f^{\leftarrow}(\mathbb{N}) = \{ n \in \mathbb{N} : f(n) \in \mathbb{N} \}$$
$$= \{ n \in \mathbb{N} : f(n) > 0 \}$$
$$= \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ é par} \}$$

c) A função f não é sobrejetiva pois, como vimos em b), não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = -2$. No entanto, -2 pertence ao conjunto de chegada da função.

6)

a) Os divisores naturais de

- 1 são 1
- 3 são 1, 3
- 6 são 1, 2, 3, 6
- 8 são 1, 2, 4, 8
- 9 são 1, 3, 9
- 11 são 1, 11

Assim, 1 tem 1 divisor em $\mathbb{N}$, 3 e 11 têm 2 divisores em $\mathbb{N}$, 9 tem 3 divisores em $\mathbb{N}$, 6 e 8 têm 4 divisores em $\mathbb{N}$.

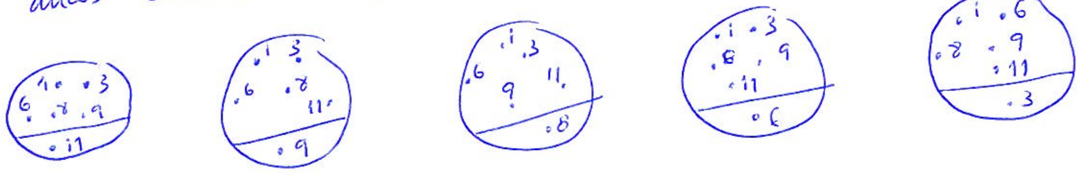
Assim,

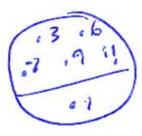
$$R = \{ (1,1), (3,3), (3,11), (11,3), (11,11), (9,9), (6,6), (6,8), (8,6), (8,8) \}$$

Portanto,

$$A/R = \{ \{1\}, \{3,11\}, \{9\}, \{6,8\} \}.$$

b) Se $\sim$ é uma relação de equivalência em A com uma classe com 5 elementos, há apenas uma outra classe e essa outra classe tem 1 só elemento (uma vez que A tem 6 elementos). Temos as seguintes possibilidades de partições de A em duas classes em que uma tem 5 elementos e a outra apenas um:



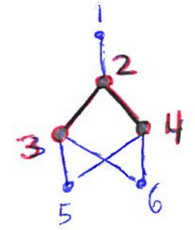


Logo, existem seis relações como as pretendidas.

7)

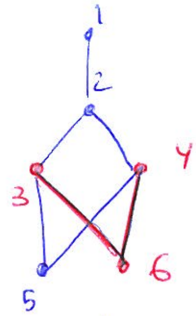
a) elementos maximais : 1
elementos minimais : 5, 6

b)



$Maj(X) = \{1,2\}$
$Min(X) = \{5,6\}$

c) $sup(Y) = 2$ (pois $Maj(Y) = \{1,2\}$ e 2 é o menor dos majorantes)



Não existe máximo de Y em A (pois $2 \notin Y$).

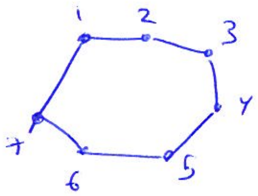
8)

a) $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1\}$

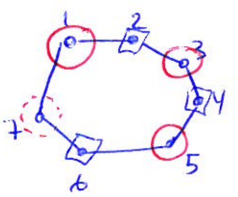
b) $A = \{9\}$, $B = \{3\}$

($a = 9$, $a > 0$ e $\exists b \in B : 2^b < a$: $3 \in B$ e $2^3 < 9$!)

c) Por exemplo



($\langle 1,2,3,4,5,6,7 \rangle$ é um caminho elementar de comprimento 6 e o grafo não é bipartido :



)

d) Não existe: se o grafo tem três vértices, v_1, v_2, v_3, e se um deles tem grau 2, digamos o vértice v_3, então existe um caminho entre quaisquer dois vértices; de facto, teremos as arestas $e_1 = \{v_1, v_3\}$ e $e_2 = \{v_2, v_3\}$. Logo, $\langle e_1 \rangle$ é um caminho de v_1 para v_3 e de v_3 para v_1; $\langle e_2 \rangle$ é um caminho de v_2 para v_3 e de v_3 para v_2; $\langle e_1, e_2 \rangle$ é um caminho de v_1 para v_2; $\langle e_2, e_1 \rangle$ é um caminho de v_2 para v_1.