1º TESTE TMD

5 novembro 2014

1. $\varphi: p_0 \to p_1$

$\psi: (p_0 \leftrightarrow p_1) \vee (\neg p_0 \wedge p_1)$

(a)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_0 \leftrightarrow p_1$	$\neg p_0 \wedge p_1$	$\varphi: p_0 \to p_1$	$\psi: (p_0 \leftrightarrow p_1) \vee (\neg p_0 \wedge p_1)$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Como o valor lógico de $\varphi \leftrightarrow \psi$ é 1 independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais p_0 e p_1, $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia, donde φ e ψ são logicamente equivalentes. A afirmação é verdadeira.

(b) Atendendo à tabela de verdade apresentada na alínea anterior, sabemos que se os valores lógicos de p_0 e p_1 são iguais a 0, então o valor lógico de ψ é 1. Portanto, a afirmação é falsa.

2.

$p: \quad \forall y \in A \ \exists x \in A \quad y = x^2$

$q: \quad \exists y \in A \ \forall x \in A \quad y = x^2$

(a) Consideremos $A = \{1, -1\}$.

Temos que $y = 1$ é tal que, para todo $x \in A$, $y = x^2$. De facto, $1^2 = 1$ e $(-1)^2 = 1$. Logo, q é verdadeira.

Já a afirmação p será falsa: para $y = -1$, não existe $x \in A$ tal que $y = x^2$ ($-1 = x^2$ não tem soluções nos inteiros!).

(b) $\neg p \Leftrightarrow \exists y \in A \ \forall x \in A \ \ y \neq x^2$

3.

(a) Sabemos que $p \wedge q$ é falsa se e só se pelo menos uma das proposições p, q é falsa.

Mostrando que se p é verdadeira então q é falsa estamos a considerar o caso em que p é verdadeira e, se então q é falsa, garantimos que $p \wedge q$ é falsa.

O caso em que p é falsa é trivial: $p \wedge q$ será também falsa.

Assim, a afirmação é verdadeira.

(b) $m, n \in \mathbb{N}$

$$m \times n \text{ ímpar} \longrightarrow (m \text{ ímpar ou } n \text{ ímpar})$$

A prova segue pela prova da contrarrecíproca:

$$\neg(m \text{ ímpar} \vee n \text{ ímpar}) \longrightarrow \neg(m \times n \text{ ímpar})$$

ou seja

$$(m \text{ par} \wedge n \text{ par}) \longrightarrow m \times n \text{ par}.$$

Admitamos, então, que m e n são pares. Então, existem $p, k \in \mathbb{N}$ tais que

$$m = 2p \quad \text{e} \quad n = 2k.$$

Logo,

$$m \times n = 2p \times 2k = 2(2pk).$$

Como $r = 2pk \in \mathbb{N}$ e $m \times n = 2r$, temos que $m \times n$ é também par, o que conclui a prova.

4.

(a) $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n^3 \leq 40\}$

$n=1 \longrightarrow n^3 = 1$
$n=2 \longrightarrow n^3 = 8$
$n=3 \longrightarrow n^3 = 27$
$n=4 \longrightarrow n^3 = 64$

$n \geq 4 \longrightarrow n^3 \geq 64$

Logo, $A = \{2n \mid n=1 \vee n=2 \vee n=3\}$
$= \{2, 4, 6\}$.

$2\times1=2$
$2\times2=4$
$2\times3=6$

$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3 \in B\}$

$x^2 - 3 \in B \Leftrightarrow x^2 - 3 = 1$
$\Leftrightarrow x^2 = 4$
$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

(OBS: a equação $x^3 - 3 = \{2,4\}$ não faz sentido!)

Assim, $D = \{-2, 2\}$.

(b) $(1, \{2,4\}, 4) \in C \times (B \setminus C) \times C$ se e só se $1 \in C$ e $\{2,4\} \in B \setminus C$ e $4 \in C$. Temos que $1 \in C, 4 \in C$ e $\{2,4\} \in B$ mas $\{2,4\} \notin C$.

Assim, $(1, \{2,4\}, 4) \in C \times (B \setminus C) \times C$.

(c) Dizer que $B \cap \mathcal{P}(C) \neq \emptyset$ é equivalente a dizer que existe pelo menos um elemento X em $B \cap \mathcal{P}(C)$.

$X \in B \cap \mathcal{P}(C) \Leftrightarrow X \in B \wedge X \in \mathcal{P}(C)$
$\Leftrightarrow X \in B \wedge X \subseteq C$

Tomando $X = \{2,4\}$, temos que $X \in B$ e que $X \subseteq C$. Logo, $B \cap \mathcal{P}(C) \neq \emptyset$

5.

(a) Sejam $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2\}$ e $C=\{3\}$.

Temos que $A\setminus(B\cap C)=A\setminus\emptyset=A$.

Por outro lado, $A\setminus B=\{1,3\}$, $A\setminus C=\{1,2\}$ e

$$(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=\{1\}.$$

Assim,

$$A\setminus(B\cap C)\neq(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$$

e a afirmação é falsa

(b) Sabemos que $B\subseteq A\cup B$ e que $A\cup B=A$.

Logo, $B\subseteq A$ e a afirmação é verdadeira.

(c) $\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$

Logo, $\mathcal{P}(\emptyset)\times\mathcal{P}(\emptyset)=\{(\emptyset,\emptyset)\}$, pelo que $(\emptyset,\{\emptyset\})\notin\mathcal{P}(\emptyset)\times\mathcal{P}(\emptyset)$

A afirmação é falsa.

(d) Se A é um conjunto com 2 elementos, então $A^2=A\times A$ tem $2\times 2=4$ elementos, $\mathcal{P}(A)$ tem $2^2=4$ elementos e, por conseguinte, $A^2\times\mathcal{P}(A)$ tem $4\times 4=16$ elementos.

A afirmação é verdadeira.

6. Dado x, temos

$$\begin{aligned}
x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B) &\Leftrightarrow x\in A\cup B\wedge x\notin(A\cap B)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\\
&\Leftrightarrow ((x\in A\vee x\in B)\wedge x\notin A)\vee((x\in A\vee x\in B)\wedge x\notin B)\\
&\Leftrightarrow \underbrace{(x\in A\wedge x\notin A)}_{\Leftrightarrow\perp}\vee(x\in B\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B)\vee\\
&\qquad\vee\underbrace{(x\in B\wedge x\notin B)}_{\Leftrightarrow\perp}\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\\
&\Leftrightarrow x\in A\setminus B\vee x\in B\setminus A\\
&\Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A).
\end{aligned}$$

Logo, $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=$
$=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.