Universidade do Minho | Lic. Engenharia Informática
Dep. Matemática e Aplicações | 2014/2015

Tópicos de Matemática Discreta

2.º teste A — 16 de janeiro de 2015 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ______

I.

Em cada exercício deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), circundando V ou F conforme adequado. Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta $0,25$ valores. A cotação mínima no grupo I é 0 valores.

1. Sejam $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ e $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ as funções definidas, respetivamente, por $f\left((p,q)\right) = \frac{p}{q}$, para todo $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, e

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

(a) f não é uma função invertível. **V** **F**

(b) $g \circ f$ é uma função constante. **V** **F**

2. Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{4,5,6\}$. Considere as relações binárias $R = \{(1,4),(2,5),(2,6),(4,5)\}$ e $S = \{(4,1),(5,4)\}$ de A em B e de B em A, respetivamente.

(a) $S \circ R$ é uma relação simétrica e antissimétrica. **V** **F**

(b) Não existe $x \in A$ tal que $x \in \mathrm{Dom}(R)$ e $x \in \mathrm{Dom}(R^{-1})$. **V** **F**

3. Seja G um grafo com 5 vértices e 8 arestas.

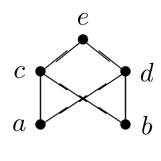
(a) Se exatamente 2 dos vértices de G têm grau 4, então G tem 2 vértices de grau ímpar. **V** **F**

(b) G é uma árvore. **V** **F**

II.

Em cada exercício deste grupo, apresente a sua resposta sem justificar.

1. **[2,5 valores]** Sejam $A = \{a,b,c,d,e\}$ e $(A, \leq)$ o c.p.o. dado pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique:

(a) o conjunto dos majorantes de $\{a,b\}$: ______________________

(b) um subconjunto de A com elemento maximal, mas sem elemento máximo: ____________

(c) um subconjunto X de A que tenha supremo, mas $sup(X) \notin X$: ____________

(d) um subconjunto de A que não tenha supremo: ______________________

2. [1 valor] Seja $A = \{a, b, c, d\}$. Considere as seguintes relações binárias em A: $R = \{(b, a), (c, b), (d, c)\}$ e $S = \{(b, c), (b, a), (c, d)\}$. Determine $S \circ R^{-1}$:

---

3. [1,5 valores] Sejam $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{N}_0$ a função tal que $f(z) = z^2$, para todo $z \in A$, e R a relação de equivalência em A definida por: $x \ R \ y$ se e só se $f(x) = f(y)$, para todo $x, y \in A$.

(a) $[1]_R =$ ____

(b) $A/R =$ ____

4. [1 valor] Seja g a função definida no exercício 1 do grupo I.

(a) $g(\{-3, -\frac{2}{3}, 0, 1, \frac{5}{2}\}) =$ ____

(b) $g^{\leftarrow}(\{0, 1\}) =$ ____

5. [1 valor] Indique a inversa da função bijetiva $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^-$ dada por $f(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$.

III.

Responda às questões deste grupo, justificando convenientemente as suas respostas.

1. [1,75 valores] Prove, por indução nos naturais, que $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. [1,75 valores] Considere a seguinte relação binária em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(m, n)R(p, q) \text{ se e só se } \{m, n\} = \{p, q\}, \text{ para todo } m, n, p, q \in \mathbb{N}.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência.

3. [1,75 valores] Seja $(A, \leq)$ um c.p.o.. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é necessariamente verdadeira: para todo $X \subseteq A$, se m é elemento máximo de X, $sup(X) = m$.

4. [1,75 valores] Diga, justificando, se o seguinte grafo é bipartido.