Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

Lic. Engenharia Informática
2014/2015

Tópicos de Matemática Discreta

2.º teste A — 16 de janeiro de 2015 — duração: 2 horas

nome: ______________________________ número ______

I.

Em cada exercício deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), circundando V ou F conforme adequado. Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0, 25 valores. A cotação mínima no grupo I é 0 valores.

1. Sejam $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ e $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ as funções definidas, respetivamente, por $f((p, q)) = \frac{p}{q}$, para todo $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, e

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

(a) f não é uma função invertível. **V F**

(b) $g \circ f$ é uma função constante. **V F**

2. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$. Considere as relações binárias $R = \{(1, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 5)\}$ e $S = \{(4, 1), (5, 4)\}$ de A em B e de B em A, respetivamente.

(a) $S \circ R$ é uma relação simétrica e antissimétrica. **V F**

(b) Não existe $x \in A$ tal que $x \in \mathrm{Dom}(R)$ e $x \in \mathrm{Dom}(R^{-1})$. **V F**

3. Seja G um grafo com 5 vértices e 8 arestas.

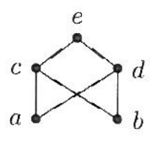
(a) Se exatamente 2 dos vértices de G têm grau 4, então G tem 2 vértices de grau ímpar. **V F**

(b) G é uma árvore. **V F**

II.

Em cada exercício deste grupo, apresente a sua resposta sem justificar.

1. [2,5 valores] Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $(A, \leq)$ o c.p.o. dado pelo seguinte diagrama de Hasse:



Indique:

(a) o conjunto dos majorantes de $\{a, b\}$: ______________________________

(b) um subconjunto de A com elemento maximal, mas sem elemento máximo: ______________

(c) um subconjunto X de A que tenha supremo, mas $sup(X) \notin X$: ______________

(d) um subconjunto de A que não tenha supremo: ______________________________

2. **[1 valor]** Seja $A = \{a, b, c, d\}$. Considere as seguintes relações binárias em A: $R = \{(b, a), (c, b), (d, c)\}$ e $S = \{(b, c), (b, a), (c, d)\}$. Determine $S \circ R^{-1}$:

---

3. **[1,5 valores]** Sejam $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{N}_0$ a função tal que $f(z) = z^2$, para todo $z \in A$, e R a relação de equivalência em A definida por: $x \; R \; y$ se e só se $f(x) = f(y)$, para todo $x, y \in A$.

(a) $[1]_R =$ ____

(b) $A/R =$ ____

4. **[1 valor]** Seja g a função definida no exercício 1 do grupo I.

(a) $g(\{-3, -\frac{2}{3}, 0, 1, \frac{5}{2}\}) =$ ____

(b) $g^{\leftarrow}(\{0, 1\}) =$ ____

5. **[1 valor]** Indique a inversa da função bijetiva $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^-$ dada por $f(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$.

III.

Responda às questões deste grupo, justificando convenientemente as suas respostas.

1. **[1,75 valores]** Prove, por indução nos naturais, que $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

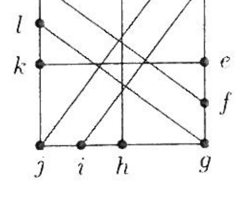
2. **[1,75 valores]** Considere a seguinte relação binária em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(m, n) R (p, q) \text{ se e só se } \{m, n\} = \{p, q\}, \text{ para todo } m, n, p, q \in \mathbb{N}.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência.

3. **[1,75 valores]** Seja $(A, \leq)$ um c.p.o.. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é necessariamente verdadeira: para todo $X \subseteq A$, se m é elemento máximo de X, $sup(X) = m$.

4. **[1,75 valores]** Diga, justificando, se o seguinte grafo é bipartido.



TMD
2º teste A
16 janeiro 2015

I

1.

a) V pois f não é injetiva. De facto,

$$f((2,1)) = \frac{2}{1} = 2$$

e $$f((4,2)) = \frac{4}{2} = 2.$$

Logo, f não é invertível.

(OBS: f também não é sobrejetiva – não existe, por exemplo, nenhum $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tal que $f((p,q)) = -\frac{1}{2}$)

b) F
$$(g\circ f)((p,q)) = g\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} \left|\frac{p}{q}\right| & \text{se } \frac{p}{q} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, $(g\circ f)((2,1)) = 2$

e $(g\circ f)((1,2)) = 0$

Logo, $g\circ f$ não é uma função constante.

2.

a) F

$S\circ R = \{(1,1), (2,4), (4,4)\}$

Como $(2,4) \in S\circ R$ e $(4,2) \notin S\circ R$, $S\circ R$ não é simétrica.

b) F

$Dom(R) = \{1,2,4\}$

$Dom(R^{-1}) = Im(R) = \{4,5,6\}$

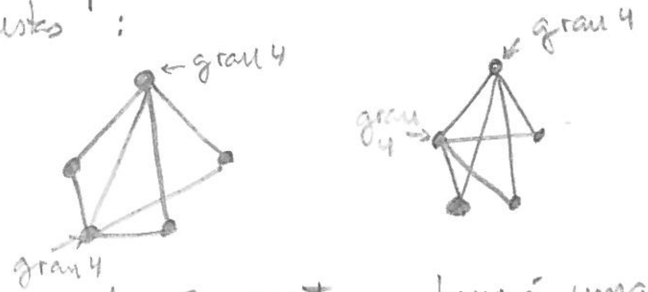
$4 \in Dom(R)$ e $4 \in Dom(R^{-1})$

3.

a) V

Se 2 vértices têm grau 4, então cada um deles é adjacente a todos os outros (existem, por aí, 7 arestas incidentes com algum desses dois vértices)

Os casos possíveis são, a menos de isomorfismo, e para essas tais 7 arestas:



Tendo o grafo 8 arestas, haverá uma outra aresta incidente com dois dos outros vértices. Assim, dois dos outros vértices terão grau 3 e o outro grau 2.

Há, portanto, dois vértices de grau ímpar.

b) F

Numa árvore, a diferença entre o nº de vértices e o nº de arestas é 1 (nº vértices − nº arestas = 1), o que não acontece em G.

II

1. a) $\text{Maj}\,\{a,b\} = \{c,d,e\}$

b) $\{c,d\}$ (c e d são maximais de $\{c,d\}$)

c) $\{c,d\}$ ($\sup\{c,d\} = e$)

d) $\{a,b\}$ ($\text{Maj}\,\{a,b\} = \{c,d,e\}$; $\nexists \sup\{a,b\}$)

2.

$$S \circ R^{-1} = \{(a,c), (a,a), (b,d)\}$$

$$\left(\text{OBS. } R^{-1} = \{(a,b), (b,c), (c,d)\} \right)$$

3.

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

a) $f(-2) = f(2) = 4$

$f(-1) = f(1) = 1$

$f(0) = 0$

$$[1]_R = \{1, -1\}$$

b) $A/R = \{ \{2,-2\}, \{0\}, \{1,-1\} \}$

4.

a) $g\left(\{-3, -\frac{2}{3}, 0, 1, \frac{5}{2}\}\right) = \{g(-3), g(-\frac{2}{3}), g(0),$

$g(1), g(\frac{5}{2})\}$

$$\left.\begin{array}{l} -3, 0, 1 \in \mathbb{Z} \\ -\frac{2}{3}, \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z} \end{array}\right\rangle \rightarrow g\left(\{-3, -\frac{2}{3}, 0, 1, \frac{5}{2}\}\right) =$$

$$= \{3, 0, 1\}$$

b) $g^{\leftarrow}(\{0,1\}) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0 \lor g(x) = 1\}$.

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \ g(x) = 0$

Logo, $g^{\leftarrow}(\{0,1\}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cup \{0, 1, -1\}$.

5.

$$f^{-1} : \mathbb{R}_0^- \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$
$$x \longmapsto -x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(-x) = -(-x) = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(-x) = -(-x) = x$$

III.

1.

$P(n)$: $\quad 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

① $n = 1$

$P(1)$ $\quad 3 = \frac{3}{2}(3^1 - 1)$

$$\frac{3}{2}(3^1 - 1) = \frac{3}{2}(3 - 1) = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

Logo, $P(1)$ é V

② Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$ é V (HI).

Temos que

$$3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^k + 3^{k+1} =$$
$$= (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^k) + 3^{k+1} \underset{HI}{=}$$
$$= \frac{3}{2}(3^k - 1) + 3^{k+1} =$$
$$= \frac{3^{k+1}}{2} - \frac{3}{2} + 3^{k+1} = \frac{3}{2} \times 3^{k+1} - \frac{3}{2} =$$
$$= \frac{3}{2}(3^{k+1} - 1).$$

Assim, $P(k+1)$ é V.

Por ① e ②, pelo Princípio de Indução em $\mathbb{N}$, $P(n)$ é V para todo $n \in \mathbb{N}$

2.

$$(m,n)\,R\,(p,q) \iff \{m,n\} = \{p,q\}$$

<u>R é reflexiva:</u> Dado $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$\{m,n\} = \{m,n\},$$

donde

$$(m,n)\,R\,(m,n).$$

<u>R é simétrica</u> Dados $(m,n),(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(m,n)\,R\,(p,q) &\iff \{m,n\} = \{p,q\}\\ &\iff \{p,q\} = \{m,n\}\\ &\iff (p,q)\,R\,(m,n)\end{aligned}$$

<u>R é transitiva</u> Dados $(m,n),(p,q),(r,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$\big((m,n)\,R\,(p,q) \wedge (p,q)\,R\,(r,t)\big) \iff$$

$$\iff \{m,n\} = \{p,q\} \wedge \{p,q\} = \{r,t\}$$

$$\implies \{m,n\} = \{r,t\} \iff (m,n)\,R\,(r,t).$$

3.

Se m é máximo de X então $m \in X$ e $\forall x\in X\ x \leq m$.
Em particular, $m \in Maj(X)$. Se $\sup(X) = n$, então
$n \leq m$ (porque o supremo é o menor dos majorantes e m é majorante) e $m \leq n$ (porque m é um elemento de X e n é majorante de X).
Ora, se $n \leq m$ e $m \leq n$, temos que $n = m$, ou seja, $\sup(X) = m$. A afirmação é, pois, V.

Nós 6/6

4. Não é. Consideremos V o conjunto dos vértices do grafo. Suponhamos que existem X e Y tais que $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = V$ e os vértices de X são adjacentes apenas com vértices de Y e os de Y apenas com vértices de X.

Temos dois casos: $a \in X$ ou $a \in Y$. Sem perda de generalidade, assumamos que $a \in X$.

Então, como b e l são adjacentes com $a \in X$, $b, l \in Y$.

Como c é adjacente com $b \in Y$, $c \in X$.

Como d é adjacente com $c \in X$, $d \in Y$.

Como e é adjacente com $d \in Y$, $e \in X$.

Como k é adjacente com $l \in Y$, $k \in X$.

Mas, assim, $e, k \in X$ e são adjacentes.

Logo, o grafo não é bipartido