Universidade do Minho | Lic. Engenharia Informática
Dep. Matemática e Aplicações | 2014/2015

Tópicos de Matemática Discreta

exame de recurso — 6 de fevereiro de 2015 — duração: 2 horas

1. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira:
   (a) As fórmulas proposicionais $\neg(\neg p_0 \to p_1)$ e $\neg p_0 \wedge \neg p_1$ são logicamente equivalentes.
   (b) Para quaisquer proposições p e q, para provar que $p \vee q$ é verdadeira, basta provar que se p é falsa, então q é verdadeira.

2. Considere os conjuntos $A = \{2, \{1, 2\}\}$ e $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n^2 < 5\}$. Justificando,
   (a) determine $A \times B$;
   (b) determine $\mathcal{P}(A \setminus B)$.

3. (a) Dê um exemplo de conjuntos A, B e C tais que $A \cup C \subseteq B \cup C$ e $A \not\subseteq B$. Justifique.
   (b) Prove que, para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$, então $A \cup C \subseteq B \cup C$.

4. Prove, por indução nos naturais, que $2^n \geq 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida da seguinte forma

$$f(n) = \begin{cases} n^2|n| & \text{se} \quad -3 \leq n \leq 3 \\ n & \text{se} \quad n < -3 \quad \text{ou} \quad n > 3 \end{cases}.$$

   (a) Indique, sem justificar, $f\big(\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 2\}\big)$ e $f^{\leftarrow}(\{8\})$.
   (b) Diga, justificando, se f é sobrejetiva.

6. Seja R a relação de equivalência em $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ definida por: xRy se e só se $|x - 2| = |y - 2|$, para quaisquer $x, y \in A$.
   (a) Indique, sem justificar, $[1]_R$ e A/R.
   (b) Mostre que, de facto, R é uma relação transitiva.

7. Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $X = \{c, e\}$. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ em que

$$\leq = \{(a, a), (b, a), (b, b), (b, c), (b, e), (c, a), (c, c), (c, e), (d, d), (e, e)\}.$$

   (a) Represente o c.p.o. $(A, \leq)$ através de um diagrama de Hasse.
   (b) Indique, sem justificar, o conjunto dos minorantes de X.
   (c) Dê exemplo, caso exista, de um subconjunto próprio Y de A tal que $(Y, \leq)$ não seja um reticulado. Justifique a sua resposta.

8. Seja $G = (V, E)$ um grafo que admite

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   como matriz de incidência.
   (a) Desenhe G.
   (b) Indique, sem justificar, o grau de cada um dos vértices de G.
   (c) Diga, justificando, se a afirmação "G é uma árvore" é verdadeira.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
	1,75+1,75	1 +1	1,5 +1,5	1,75	1+1	1,25+1	1+0,75+1	1+0,75+1