TMD

Exame de recurso

29. janeiro '2016

1.

a)

| $p_0$ | $p_1$ | $\neg p_0$ | $\neg p_1$ | $\neg p_0 \wedge p_1$ | $p_0 \leftrightarrow \neg p_1$ | $\overbrace{(\neg p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)}^{G}$ | $G \to p_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Se a fórmula proposicional $((\neg p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)) \to p_0$ tem o valor lógico 0, então $p_0$ tem o valor lógico 0 e $p_1$ tem o valor lógico 1, como podemos comprovar pela tabela.

Logo, a afirmação é verdadeira.

b) $p$ diz-nos que é possível escrever qualquer elemento ímpar $x$ de $D$ como a diferença entre dois elementos $y, z$ de $D$ (ou seja, se $x \in D$ e $x$ é ímpar, então existem $y, z \in D$ tais que $x = z - y$)

Ora, se $x \in D$ e $x$ é ímpar, então $x = -13$ ou $x = 3$ ou $x = 5$.

Para $x = -13$, considerando $y = 3$ e $z = -10$, temos

$$x + y = z.$$

Para $x = 3$, tomando $y = 2$ e $z = 5$, obtemos

$$x + y = z.$$

Para $x = 5$, considerando $y = -2$ e $z = 3$, temos

$$x + y = z.$$

Assim, a afirmação p é verdadeira para o conjunto D dado.

2.

a) $|x|+1 \in A \iff |x|+1=-2 \ \vee\ |x|+1=1 \ \vee\ |x|+1=3$

$|x|+1=-2 \iff |x|=-3$ impossível

$|x|+1=1 \iff |x|=0 \iff x=0$ (observe-se que $0\in\mathbb{Z}$)

$|x|+1=3 \iff |x|=2 \iff x=\pm 2$ (observe-se que $-2\in\mathbb{Z}$ e $2\in\mathbb{Z}$).

Assim, $B=\{-2,0,2\}$

$$B\times A = \{(b,a) : b\in B \wedge a\in A\}$$
$$= \{(-2,-2),(-2,1),(-2,3),(0,-2),(0,1),(0,3),(2,-2),(2,1),(2,3)\}$$

$$A\times A = \{(a_1,a_2) : a_1, a_2\in A\}$$
$$= \{(-2,-2),(-2,1),(-2,3),(1,-2),(1,1),(1,3),(3,-2),(3,1),(3,3)\}$$

Logo,
$$(B\times A)\cap(A\times A) = \{(-2,-2),(-2,1),(-2,3)\}$$

b) $\mathcal{P}(A) = \{\underline{\{-2\}},\underline{\{1\}},\{3\},\underline{\{-2,1\}},\{-2,3\},\{1,3\},\{-2,1,3\},\emptyset\}$

$\mathcal{P}(C) = \{\underline{\{-2\}},\underline{\{1\}},\{\{1,3\}\},\underline{\{-2,1\}},\{-2,\{1,3\}\},\{1,\{1,3\}\},\{-2,1,\{1,3\}\},\underline{\emptyset}\}$

$$\mathcal{P}(C)\setminus\mathcal{P}(A) = \{X : X\in\mathcal{P}(C) \wedge X\notin\mathcal{P}(A)\}$$
$$= \{\{\{1,3\}\},\{-2,\{1,3\}\},\{1,\{1,3\}\},\{-2,1,\{1,3\}\}\}.$$

3.

(a) A afirmação é falsa.

Consideremos $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$ e $C = \{3\}$.

Temos que $A \setminus C = \{1,2\} = B \setminus C$.

No entanto, $A \neq B$.

(b) Sejam $A, B, C$ conjuntos

Admitamos que $A \cap B \subseteq C$.

Então, $\forall x, \ (x \in A \cap B \rightarrow x \in C)$ (*)

Seja $x \in A$. Pretendemos mostrar que $x \in C \cup (A \setminus B)$.

Temos dois casos possíveis:

(1) $x \in B$

Neste caso, $x \in A \wedge x \in B$. Logo, $x \in A \cap B$ e, por (*), $x \in C$.
Assim, $x \in C \cup (A \setminus B)$, uma vez que $C \subseteq C \cup (A \setminus B)$.

(2) $x \notin B$

Neste caso, $x \in A \wedge x \notin B$, pelo que $x \in A \setminus B$.

Assim, $x \in C \cup (A \setminus B)$, pois $A \setminus B \subseteq C \cup (A \setminus B)$.

Assim, concluímos que $x \in C \cup (A \setminus B)$.

Logo, $A \subseteq C \cup (A \setminus B)$.

4. Seja $P(n)$ o predicado $n^3 + 2n$ é divisível por 3.

(1) $n = 1$ $\quad n^3 + 2n = 1^3 + 2 \times 1 = 3$, que é divisível por 3.

Assim, $P(1)$ é verdadeira.

② Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $P(k)$ é verdadeira, ou seja,

$k^3 + 2k$ é divisível por 3. (H.I).

Pretendemos mostrar que $(k+1)^3 + 2(k+1)$ é divisível por 3.

Temos que

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$$
$$= \underbrace{(k^3 + 2k)}_{\text{divisível por 3 por H.I.}} + \underbrace{3k^2 + 3k + 3}_{\text{divisível por 3}},$$

pelo que $(k+1)^3 + 2(k+1)$ é divisível por 3.

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Por ① e ②, pelo Princípio de Indução em $\mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

5.

(a) $f(\{0,1\}) \cap f(\{2,3\}) = \{f(0), f(1)\} \cap \{f(2), f(3)\}$

$= \{(0,1), (2,3)\} \cap \{(2,3), (4,5)\} = \{(2,3)\}$.

0 é par
1 é ímpar
2 é par
3 é ímpar

$f^{\leftarrow}(\{(0,1), (1,2)\}) = \{n \in \mathbb{Z} : f(n) = (0,1) \vee f(n) = (1,2)\}$.

$= \{0, -1\}$

Se $n$ é par: $f(n) = (0,1) \Leftrightarrow (n, n+1) = (0,1) \Leftrightarrow n = 0$

$f(n) = (1,2) \Leftrightarrow (n, n+1) = (1,2) \Leftrightarrow n = 1$, o que é impossível já que $n$ é par.

Se $n$ é ímpar:

$$f(n) = (0,1) \iff (n+1, n+2) = (0,1) \iff n = -1$$

$$f(n) = (1,2) \iff (n+1, n+2) = (1,2) \iff n = 0,$$ o que é impossível, já que $n$ é ímpar.

b) Vimos, em a), que $f(0) = f(-1) = (0,1)$. Assim, $f$ não é injetiva.
Vimos, também em a), que não existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(n) = (1,2)$.
Logo, $f$ não é sobrejetiva.

6.

$$A = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$$

a)

| $+$ | $y=-4$ | $y=-3$ | $y=-2$ | $y=-1$ | $y=0$ | $y=1$ | $y=2$ | $y=3$ | $y=4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x \backslash 3y$ | -12 | -9 | -6 | -3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| -4 | -16 | -13 | -10 | -7 | -4 | -1 | 2 | 5 | 8 |
| -3 | -15 | -12 | -9 | -6 | -3 | 0 | 3 | 6 | 9 |
| -2 | -14 | -11 | -8 | -5 | -2 | 1 | 4 | 7 | 10 |
| -1 | -13 | -10 | -7 | -4 | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 |
| 0 | -12 | -9 | -6 | -3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| 1 | -11 | -8 | -5 | -2 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 |
| 2 | -10 | -7 | -4 | -1 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 |
| 3 | -9 | -6 | -3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 4 | -8 | -5 | -2 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 |

$$\exists_{q \in \mathbb{Z}} : x + 3y = 4q \iff x + 3y \text{ é múltiplo de } 4.$$

Assim, $[-1]_R = \{y \in A : -1 R y\} = \{y \in A : -1+3y \text{ é múltiplo de } 4\} = \{-1, 3\}$

e

$$A/R = \{[x]_R : x \in A\} = \{[-4]_R, [-3]_R, [-2]_R, [-1]_R\} = \{\{-4,0,4\}, \{-3,1\}, \{-2,2\}, \{-1,3\}\}.$$

b) Sejam $x, y, z \in A$ tais que $x R y$ e $y R z$.

Então,

$$\exists_{q_1, q_2 \in \mathbb{Z}} : (x + 3y = 4q_1 \wedge y + 3z = 4q_2).$$

Pretendemos mostrar que

$$\exists_{q \in \mathbb{Z}} : x + 3z = 4q.$$

Sabemos que

$$x = 4q_1 - 3y$$

e que

$$3z = 4q_2 - y.$$

Assim,

$$x + 3z = 4q_1 - 3y + 4q_2 - y$$
$$= 4\underbrace{(q_1 + q_2 - y)}_{\in \mathbb{Z}}.$$

Tomando $q = q_1 + q_2 - y$, segue-se que

$$x + 3z = 4q.$$

Logo, $x R z$.

Assim, $\forall_{x,y,z \in D} ((x R y \wedge y R z) \rightarrow (x R z))$,

pelo que $R$ é transitiva.

7. a) i) $\{a, d\}$

ii) $x = c$, $y = e$ $\quad sup(\{x, y\}) = \{h\}$

$x // y$

iii) $z = b$, $w = e$

$z // w$ e $\nexists sup(\{z, w\})$

b) $Y = \{a, c, e, h\}$

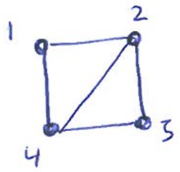
Os únicos elementos de $Y$ não comparáveis são $c$ e $e$.

Temos que $\sup(\{c,e\}) = h$ e $\inf(\{c,e\}) = a$.

Logo, $Y$ é um reticulado.

8.

a)




grau (1) = grau (3) = 2 (par)

grau (2) = grau (4) = 3 (ímpar)

b)


não tem ciclos

c) Não existe um tal grafo.

Sabemos que, numa árvore, a diferença entre o número de vértices e o número de arestas é 1.

Sabemos, também, que o nº de vértices de grau ímpar é par. Portanto, neste caso, teríamos um nº par de vértices e um nº par de arestas. Sendo assim, a diferença entre o nº de vértices e o número de arestas não pode ser 1!