TMD

28 outubro 2015

1. $\varphi: (\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_0 \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_1))$

$\psi: (p_1 \rightarrow p_0) \rightarrow \neg p_0$

a)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$\neg p_1$	$\neg p_0 \vee p_1$	$p_1 \wedge \neg p_1$	$p_0 \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_1)$	φ
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1

Como podemos comprovar pela tabela de verdade acima, φ pode assumir os valores lógicos 0 e 1, dependendo dos valores lógicos das variáveis proposicionais p_0 e p_1. Sendo assim, φ não é tautologia nem contradição, pelo que a afirmação é falsa.

b)

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \rightarrow p_0$	ψ	φ (usando a informação da tabela apresentada em (a))
1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Como podemos ver na 2ª linha da tabela, quando o valor lógico de p_0 é 1 e o de p_1 é 0, ψ tem valor lógico 0 mas φ tem valor lógico 1. Portanto, a afirmação é falsa.

2. $p: \forall_{a \in A} \ (a \geq 0 \longrightarrow \exists_{b \in B} \ (a = 2b \vee a^2 = a))$

(a) $A = \{-2, 0, 1, 4\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

Dado $a \in A$, com $a \geq 0$, pretendemos verificar se existe $b \in B$ tal que $a = 2b$ ou $a^2 = a$.

Ora, se $a \in A$ e $a \geq 0$, temos que $a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = 4$.

$a=0$ Temos $a = 2\times 0$ e $0 \in B$. Logo, $\exists b \in B \; a=2b$

(além disso, também é verdade que $a^2 = 0^2 = 0 = a$)

Portanto, $\exists b \in B \; (a=2b \vee a^2=a)$ é uma proposição verdadeira.

$a=1$ Temos $a^2 = 1^2 = 1 = a$.

Logo, a proposição $\exists b \in B \; (a=2b \vee a^2=a)$ é verdadeira.

$a=4$ Temos $a = 2\times 2$ e $2 \in B$. Assim, $\exists b \in B \; a=2b$.

Logo, a proposição $\exists b \in B \; (a=2b \vee a^2=a)$ é verdadeira.

Podemos, então, concluir que p é verdadeira para A.

b) $\neg p \Leftrightarrow \neg \forall a \in A \; (a \geq 0 \rightarrow \exists b \in B \; (a=2b \vee a^2=a))$

$\Leftrightarrow \exists a \in A \; (a \geq 0 \wedge \forall b \in B \; (a \neq 2b \wedge a^2 \neq a))$

3. (a) A afirmação é falsa.

Para mostrar que $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira, não basta provar que se p é verdadeira, então q é verdadeira, uma vez que faltaria provar que se p é falsa então q é falsa.

(OBS.: Consideremos, por exemplo, que p representa a condição $x>0$ e que q representa a condição $x^2>0$. É verdade que se p é verdadeira, então q é verdadeira. No entanto, $p \Leftrightarrow q$ é falsa ...)

(b) Sabemos que existem a, b, c, distintos, pertencentes a A.

É óbvio que ou ① há pelo menos dois nºs pares de entre a, b e c

ou ② há pelo menos dois nºs ímpares de entre a, b e c.

Em cada um dos casos, sejam m e n esses dois números

<u>CASO ①</u>: $m, n \in \{a,b,c\}$, $m \neq n$, m, n pares

Existem, então, $k, r \in \mathbb{Z}$ tais que $m = 2k$ e $n = 2r$.

Assim, $m - n = 2k - 2r = \underbrace{2(k-r)}_{\in \mathbb{Z}}$

Logo, $m-n$ é par.

<u>CASO ②</u>: $m, n \in \{a,b,c\}$, $m \neq n$, m, n ímpares

Existem, então, $k, r \in \mathbb{Z}$ tais que $m = 2k+1$ e $n = 2r+1$.

Logo,

$$m - n = (2k+1) - (2r+1)$$
$$= 2k + 1 - 2r - 1$$
$$= 2\underbrace{(k-r)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Portanto, $m-n$ é par.

4.

(a) $B = \{m^2 \mid m \in \mathbb{N} \wedge 2m < 5\}$

$2m < 5 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2} \Leftrightarrow m < 2{,}5$

Logo, $B = \{m^2 \mid m = 1 \text{ ou } m = 2\}$
$= \{1^2, 2^2\} = \{1, 4\}$

$\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$
$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$
$\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x} \in C\} = \{1, 4, 16\}$

(b) $(1,4,1) \in C \times (A \cap C) \times A$
$\Leftrightarrow 1 \in C \wedge 4 \in A \cap C \wedge 1 \in A$
$\Leftrightarrow 1 \in C \wedge 4 \in A \wedge 4 \in C \wedge 1 \in A$

Ora, $4 \notin A$.

Logo, $(1,4,1) \notin C \times (A \cap C) \times A$.

(c) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{4\}\}, \{1, \{4\}\}\}$

5.

(a) $\{\emptyset\} \subseteq A \Leftrightarrow \emptyset \in A$.
Para $A = \{1,2\}$, por exemplo, $\emptyset \notin A$.
Logo, a afirmação é falsa.

1b) Se $A \in B$, A é um dos elementos de B.

Como $B \subseteq C$, todos os elementos de B são elementos de C.

Logo, sendo A um elemento de B, A é, também, um elemento de C. Assim, $A \in C$ e a afirmação é verdadeira.

(c) Seja $A = \{1, \{1\}\}$.

Temos que
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$$

Logo, $\mathcal{P}(A) \cap A = \{\{1\}\} \neq \emptyset$, pelo que a afirmação é falsa.

(d) Se $A = \emptyset$, $B = \{1\}$ e $C = \{2\}$, então

$$A \times B = \emptyset \times \{1\} = \emptyset \text{ e}$$
$$A \times C = \emptyset \times \{2\} = \emptyset.$$

Assim, $A \times B = A \times C$ mas $B \neq C$.

6. Suponhamos que $(A \cap B) \setminus C \neq \emptyset$. Então, existe pelo menos um elemento x de $(A \cap B) \setminus C$. Assim,

$$x \in (A \cap B) \wedge x \notin C,$$

ou seja,

$$x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C.$$

Mas, deste modo, $x \in A \cap B$ e $x \notin A \cap C$, o que contradiz o facto de $A \cap B$ ser igual a $A \cap C$.

Logo, $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$.