Universidade do Minho — Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Dep. Matemática e Aplicações — 2015/2016

Tópicos de Matemática Discreta

2.º teste — 8 de janeiro de 2016 — duração: 2 horas

1. Prove, por indução nos naturais, que $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\ldots(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}$, para todo o natural $n\geq 2$.

2. Sejam $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ e $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ as funções definidas por

$$f(m)=\begin{cases}\frac{m-1}{2} & \text{se} \quad m \text{ é ímpar}\\ 2|m|+1 & \text{se} \quad m \text{ é par}\end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(n)=2n+1.$$

   (a) Determine $f(\{2n+1\,|\,n\in\mathbb{Z}\})$ e $f^{\leftarrow}(\{5\})$.
   (b) Seja $U=\{-3,0,3\}$. Verifique se $g(g^{\leftarrow}(U))=U$. Justifique a sua resposta.
   (c) Mostre que $f\circ g=id_{\mathbb{Z}}$.
   (d) Diga, justificando, se existe alguma aplicação $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tal que $h\circ f=id_{\mathbb{Z}}$ e $f\circ h=id_{\mathbb{Z}}$.

3. Sejam $A=\{1,2,3,4,5\}$ e S e T as relações binárias em A definidas, respetivamente, por

$$S=\{(x,y)\in A\times A\mid y+1=2x\} \qquad \text{e}$$

$$T=\{(1,3),(3,1),(2,1),(4,2),(5,2)\}.$$

   (a) Determine $\mathrm{Dom}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
   (b) $S\cap T=\emptyset$? Justifique a sua resposta.
   (c) Diga, justificando, se $T\circ T^{-1}\subseteq \mathrm{id}_A\subseteq T^{-1}\circ T$.
   (d) Determine, caso exista, a menor relação binária em A que contém T e é:
      i. antissimétrica. ii. transitiva.

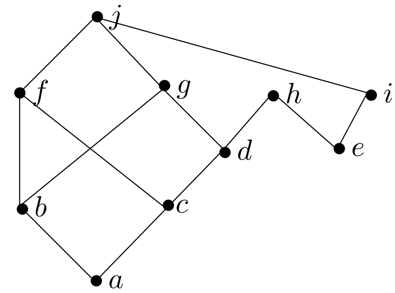
4. Sejam $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e R a relação de equivalência definida em A por

$$x\,R\,y \text{ sse } xy^{-1}\in\{-1,1\}.$$

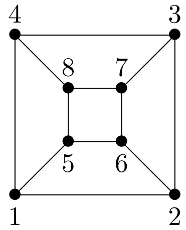
   (a) Mostre que a relação binária R é, efetivamente, simétrica.
   (b) Determine $[2]_R$.
   (c) Determine A/R.

5. Consideremos o c.p.o. $(A,\leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse associado:

   (a) Indique, caso existam:
      i. os elementos minimais e os elementos maximais de A;
      ii. Maj{b,c};
      iii. um subconjunto de A com exatamente 5 elementos que admita máximo e mínimo.
   (b) Diga, justificando, se $(A,\leq)$ é um reticulado.



6. Considere o seguinte grafo



   (a) Indique os graus dos vértices de G.
   (b) Indique
      i. um caminho de 1 para 4 que passe por mais de 4 vértices.
      ii. um ciclo em G de comprimento 8.

7. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:
   (a) Existem funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f é uma função constante mas $g \circ f$ não é uma função constante.
   (b) Se Π_1 é uma partição de um conjunto A e Π_2 é uma partição de um conjunto B, então $\Pi_1 \cup \Pi_2$ é uma partição de $A \cup B$.
   (c) Num c.p.o. $(X, \leq)$, se m é um elemento minimal de X, então m não é o máximo de X.
   (d) Se uma matriz A do tipo 4×3 é matriz de incidência de um grafo G, então existem pelo menos dois vértices em G que não são adjacentes.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	2	1,25 +1+1+1,25	0,5+1+1+1	0,75+0,75+1	1,25+1	0,5+0,75	1+1+1+1