TMD
2º teste
8 jan 2016

1. Seja $\mathcal{P}(n)$ o predicado $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$ sobre os naturais $n\geq 2$.

(I) Para $n=2$, temos

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{4}=\frac{2+1}{2\times 2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$, uma proposição verdadeira.

Logo, $\mathcal{P}(2)$ é verdadeira.

(II) Seja $k\in\mathbb{N}$ tal que $k\geq 2$ e $\mathcal{P}(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}. \quad \text{(HI)}.$$

Pretendemos mostrar que $\mathcal{P}(k+1)$ é verdadeira, isto é, que

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}.$$

Temos que

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)} \Leftrightarrow$$

$$\underset{\text{HI}}{\Leftrightarrow} \frac{k+1}{2k}\times\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{2k}-\frac{k+1}{2k(k+1)^2}=\frac{k+2}{2(k+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^3-(k+1)}{2k(k+1)^2}=\frac{k+2}{2(k+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)\left((k+1)^2-1\right)}{2k(k+1)^2}=\frac{k+2}{2(k+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2-1}{2k(k+1)}=\frac{k+2}{2(k+1)} \Leftrightarrow \frac{((k+1)-1)((k+1)+1)}{2k(k+1)}=\frac{k+2}{2(k+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k(k+2)}{2k(k+1)}=\frac{k+2}{2(k+1)} \Leftrightarrow \frac{k+2}{2(k+1)}=\frac{k+2}{2(k+1)}$$, uma proposição verdadeira.

Assim, $\mathcal{P}(k+1)$ é verdadeira.

Por (I) e (II), pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ de base 2, $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira para todo $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

2.

(a) $f\left(\{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}\right) = \{f(2n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{se } n \in \mathbb{Z}\text{, então} \\ 2n+1 \text{ é ímpar}}}{=} \left\{\frac{(2n+1)-1}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{2n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \{n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

$f^{\leftarrow}(\{5\}) = \{m \in \mathbb{Z} : f(m) = 5\}$

$f(m) = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{m-1}{2} = 5 \wedge m \text{ é ímpar}\right) \vee \left(2|m|+1 = 5 \wedge m\right.$ é par$\left.\right) \Leftrightarrow (m = 11 \wedge m \text{ é ímpar}) \vee (|m| = 2 \wedge m$ é par$) \Leftrightarrow (m=11 \wedge m \text{ é ímpar}) \vee (m = \pm 2 \wedge m \text{ é par})$

Logo, $f^{\leftarrow}(\{5\}) = \{-2, 2, 11\}$

(b) $g^{\leftarrow}(U) = \{n \in \mathbb{Z} \mid g(n) \in U\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid g(n) = -3 \vee g(n) = 0 \vee g(n) = 3\}.$

$g(n) = -3 \Leftrightarrow 2n+1 = -3 \Leftrightarrow n = -2$

$g(n) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2n+1}_{\text{ímpar}} = \underbrace{0}_{\text{par}}$ impossível

$g(n) = 3 \Leftrightarrow 2n+1 = 3 \Leftrightarrow n = 1$

Assim, $g^{\leftarrow}(U) = \{-2, 1\}$. Portanto,

$$g\left(g^{\leftarrow}(U)\right) = \{g(-2), g(1)\} = \{-3, 3\},$$

pelo que $g\left(g^{\leftarrow}(U)\right) \neq U$.

(c) Temos que $f \circ g$ e $id_{\mathbb{Z}}$ são funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

Além disso, dado $n \in \mathbb{Z}$,

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n+1) \underset{\substack{\downarrow \\ 2n+1 \\ \text{é ímpar}}}{=} \frac{(2n+1)-1}{2} = n = id_{\mathbb{Z}}(n).$$

Portanto, $f \circ g = id_{\mathbb{Z}}$.

(d) Se existisse uma tal aplicação, então h seria a inversa de f. No entanto, f não é invertível (sabemos, por a), que $f(2) = f(-2) = 5$, o que mostra que f não é injetiva e, portanto, não é bijetiva).

Logo, tal h não existe.

3. (a) $\text{Dom}(T) = \{x \in A \mid \exists y \in A : (x,y) \in T\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\text{Im}(T) = \{y \in A \mid \exists x \in A : (x,y) \in T\}$

$= \{1, 2, 3\}$.

(b) Temos que

$$S = \{(x,y) \in A \times A : y = 2x - 1\}$$

Para $x = 1$, temos que $y = 2x - 1 \Leftrightarrow y = 2 \times 1 - 1 \Leftrightarrow y = 1$

Para $x = 2$, temos que $y = 2x - 1 \Leftrightarrow y = 3$

Para $x = 3$, temos que $y = 2x - 1 \Leftrightarrow y = 5$

Para $x = 4$, temos que $y = 2x - 1 \Leftrightarrow y = 7$

Para $x = 5$, temos que $y = 2x - 1 \Leftrightarrow y = 9$

Note-se que $7 \notin A$ e $9 \notin A$. Logo, $S = \{(1,1), (2,3), (3,5)\}$

Assim, $S \cap T = \{(x,y) \in A \times A \mid (x,y) \in S \wedge (x,y) \in T\}$

$= \emptyset$.

(c) $T = \{(1,3), (3,1), (2,1), (4,2), (5,2)\}$

$T^{-1} = \{(3,1), (1,3), (1,2), (2,4), (2,5)\}$

$T \circ T^{-1} = \{(3,3), (1,1), (2,2)\} \subseteq id_A$

$T^{-1} \circ T = \{(1,1), (3,3), (3,2), (2,3), (2,2), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$

Como $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) \in T^{-1} \circ T$, $id_A \subseteq T^{-1} \circ T$.

Assim,

$$T \circ T^{-1} \subseteq id_A \subseteq T^{-1} \circ T.$$

(d)

i) Seja R a relação binária pretendida. Se R contém T, então $(1,3), (3,1) \in R$, pelo que R não pode ser antissimétrica. Não existe, então, a relação binária pretendida.

ii) Seja R a relação binária pretendida. Então, $T \subseteq R$, ou seja, $(1,3), (3,1), (2,1), (4,2), (5,2) \in R$.
Temos que (uma vez que R é transitiva):

$$((1,3) \in R \wedge (3,1) \in R) \to (1,1) \in R$$
$$((3,1) \in R \wedge (1,3) \in R) \to (3,3) \in R$$
$$((2,1) \in R \wedge (1,3) \in R) \to (2,3) \in R$$
$$((2,3) \in R \wedge (3,1) \in R) \to (2,1) \in R$$
$$((4,2) \in R \wedge (2,1) \in R) \to (4,1) \in R$$
$$((4,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \to (4,3) \in R$$
$$((5,2) \in R \wedge (2,1) \in R) \to (5,1) \in R$$
$$((5,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \to (5,3) \in R$$

Tomando $R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3), (5,1), (5,3)\}$,

temos que $R \circ R \subseteq R$, donde R é transitiva e, pela análise feita acima, R é a menor relação binária em A que contém T e que é transitiva.

4.

$$x R y \Leftrightarrow xy^{-1} \in \{-1,1\}$$
$$\Leftrightarrow x \times \frac{1}{y} = -1 \lor x \times \frac{1}{y} = 1$$
$$\Leftrightarrow x = -y \lor x = y.$$

(a) Sejam $x, y \in A$ tais que $x R y$.
Pretendemos mostrar que $y R x$. Ora, se $x R y$, vimos acima que $x = -y \lor x = y$. Logo,

$$y x^{-1} = y(-y)^{-1} \lor y x^{-1} = y(y)^{-1},$$

isto é,

$$y x^{-1} = y \times \left(-\frac{1}{y}\right) = -1 \lor y x^{-1} = y \times \frac{1}{y} = 1.$$

Portanto, $yx^{-1} \in \{-1,1\}$ e $y R x$.

Logo, R é simétrica.

(b) $[2]_R = \{x \in A \mid x R 2\} = \{x \in A \mid x \times \frac{1}{2} = 1 \lor x \times \frac{1}{2} = -1\} =$
$= \{x \in A \mid x = 2 \lor x = -2\} = \{2, -2\}.$

(c)
$$A/R = \{ [x]_R \mid x \in A\}$$
$$= \{ \{y \in A \mid x R y\} \mid x \in A\}$$
$$= \{ \{x, -x\} \mid x \in A\}.$$

5.

(a) i) Os elementos minimais de A são a, e.
Os elementos maximais de A são h, j.

ii) $\text{Maj}\{b, c\} = \{f, g, j\}$

iii) $X = \{a, c, d, g, j\}$

$\min(X) = a$; $\max(X) = j$.

(b)

Sabemos que $(A, \leq)$ é um reticulado se para quaisquer $x, y \in A$ existem $\sup\{x,y\}$ e $\inf\{x,y\}$.

Como $Maj\{b,c\} = \{f, g, j\}$ e $f \parallel g$, não existe $\sup\{b,c\}$.

Logo, $(A, \leq)$ não é um reticulado.

6. (a) Todos os vértices de G têm grau 3 (existem exatamente 3 arestas a incidir com cada um dos vértices)

(b) i) $\langle 1, 5, 6, 7, 8, 4 \rangle$

ii) $\langle 1, 5, 6, 2, 3, 7, 8, 4, 1 \rangle$

7. (a) Se f é constante, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = a, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Temos que existe (um e um só) $b \in \mathbb{R}$ tal que $g(a) = b$, uma vez que g é função. Assim,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a) = b, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $g \circ f$ é uma função constante.

A afirmação é falsa.

(b) A afirmação é falsa. Consideremos $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $\Pi_1 = \{\{1\},\{2\}\}$ e $\Pi_2 = \{\{1,3\}\}$. Temos que

$$\Pi_1 \cup \Pi_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{1,3\}\}$$

não é partição de $A \cup B$ pois $\{1\} \cap \{1,3\} \neq \emptyset$.

(c) A afirmação é falsa. Se o c.p.o $(X, \leq)$ é tal que $X = \{1\}$ e $\leq = \{(1,1)\}$, então 1 é elemento minimal de X e é o máximo de X. (OBS: O diagrama de Hasse associado seria: •1)

(d) Sendo A do tipo 4×3, G terá 4 vértices e 3 arestas. Para que todos os vértices de G fossem adjacentes entre si, G teria de ter 6 arestas (G seria representado por ). Assim, a afirmação é verdadeira.