Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
2015/2016

Tópicos de Matemática Discreta

exame de recurso — 29 de janeiro de 2016 — duração: 2 horas

1. (a) Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Se a fórmula proposicional $((\neg p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)) \rightarrow p_0$ tem o valor lógico falso, então a proposição p_1 tem valor lógico verdadeiro.
   (b) Considere que p representa a proposição $\forall_{x\in D}\,(x$ é ímpar $\rightarrow (\exists_{y\in D}\,\exists_{z\in D}\; x+y=z))$. Diga, justificando, se p é verdadeira para $D = \{-13,-10,-2,3,2,5\}$. Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

2. Considere os conjuntos $A = \{-2,1,3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x|+1 \in A\}$ e $C = \{-2,1,\{1,3\}\}$.
   (a) Justificando, determine $(B \times A) \cap (A \times A)$.
   (b) Determine $\mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}(A)$. Justifique a sua resposta.

3. (a) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \setminus C = B \setminus C$, então $A = B$.
   (b) Prove que, para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \cap B \subseteq C$, então $A \subseteq C \cup (A \setminus B)$.

4. Prove, por indução nos naturais, que $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Considere a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida da seguinte forma

$$f(n) = \begin{cases} (n, n+1) & \text{se } n \text{ é par} \\ (n+1, n+2) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

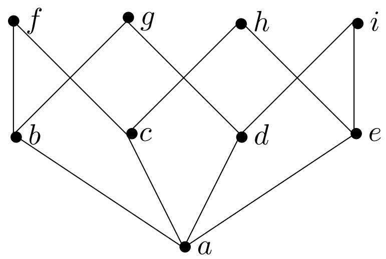
   (a) Justificando, defina por extensão, $f\big(\{0,1\}\big) \cap f\big(\{2,3\}\big)$ e $f^{\leftarrow}(\{(0,1),(1,2)\})$.
   (b) Diga, justificando, se f é injetiva e/ou sobrejetiva.

6. Seja R a relação de equivalência em $A = \{z \in \mathbb{Z} : -4 \leq z \leq 4\}$ definida por:

$$xRy \text{ se e só se } \exists_{q\in\mathbb{Z}}\; x + 3y = 4q,$$

   para quaisquer $x, y \in A$.
   (a) Indique, sem justificar, $[-1]_R$ e A/R.
   (b) Mostre que, de facto, R é uma relação transitiva.

7. Consideremos o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse associado:
   (a) Indique, sem justificar:
      i. o conjunto dos minorantes de $X = \{d, g, i\}$;
      ii. $x, y \in A$ não comparáveis tais que existe sup({x,y});
      iii. $z, w \in A$ tais que não existe sup({z,w}).
   (b) Indique, justificando, um subconjunto Y de A com pelo menos 4 elementos tal que $(Y, \leq)$ é um reticulado.



8. Dê exemplo de ou justifique que não existe
   (a) um grafo com 4 vértices, tendo exatamente dois deles grau par;
   (b) um grafo sem ciclos de comprimento superior a 3;
   (c) uma árvore com um número par de arestas e todos os vértices de grau ímpar.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Cotações	1,75+1,75	1 +1	1,5 +1,5	1,75	1+1	1,25+1	1,5+1,25	0,75+1+1