Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
2015/2016

Tópicos de Matemática Discreta

exame de recurso — 29 de janeiro de 2016 — duração: 2 horas

1. (a) Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Se a fórmula proposicional $((\neg p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)) \rightarrow p_0$ tem o valor lógico falso, então a proposição p_1 tem valor lógico verdadeiro.

   (b) Considere que p representa a proposição $\forall_{x \in D}\,(x$ é ímpar $\rightarrow (\exists_{y \in D}\,\exists_{z \in D}\; x+y=z))$. Diga, justificando, se p é verdadeira para $D = \{-13, -10, -2, 3, 2, 5\}$. Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

2. Considere os conjuntos $A = \{-2, 1, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| + 1 \in A\}$ e $C = \{-2, 1, \{1, 3\}\}$.

   (a) Justificando, determine $(B \times A) \cap (A \times A)$.

   (b) Determine $\mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}(A)$. Justifique a sua resposta.

3. (a) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \setminus C = B \setminus C$, então $A = B$.

   (b) Prove que, para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \cap B \subseteq C$, então $A \subseteq C \cup (A \setminus B)$.

4. Prove, por indução nos naturais, que $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Considere a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida da seguinte forma

$$f(n) = \begin{cases} (n, n+1) & \text{se } n \text{ é par} \\ (n+1, n+2) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

   (a) Justificando, defina por extensão, $f(\{0,1\}) \cap f(\{2,3\})$ e $f^{\leftarrow}(\{(0,1),(1,2)\})$.

   (b) Diga, justificando, se f é injetiva e/ou sobrejetiva.

6. Seja R a relação de equivalência em $A = \{z \in \mathbb{Z} : -4 \leq z \leq 4\}$ definida por:

$$xRy \text{ se e só se } \exists_{q \in \mathbb{Z}}\; x + 3y = 4q,$$

   para quaisquer $x, y \in A$.

   (a) Indique, sem justificar, $[-1]_R$ e A/R.

   (b) Mostre que, de facto, R é uma relação transitiva.

7. Consideremos o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse associado:

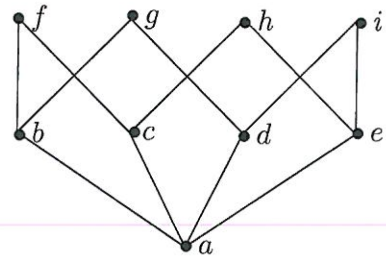
   (a) Indique, sem justificar:

      i. o conjunto dos minorantes de $X = \{d, g, i\}$;

      ii. $x, y \in A$ não comparáveis tais que existe sup({x,y});

      iii. $z, w \in A$ tais que não existe sup({z,w}).

   (b) Indique, justificando, um subconjunto Y de A com pelo menos 4 elementos tal que $(Y, \leq)$ é um reticulado.



8. Dê exemplo de ou justifique que não existe

   (a) um grafo com 4 vértices, tendo exatamente dois deles grau par;

   (b) um grafo sem ciclos de comprimento superior a 3;

   (c) uma árvore com um número par de arestas e todos os vértices de grau ímpar.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
	1,75+1,75	1 +1	1,5 +1,5	1,75	1+1	1,25+1	1,5+1,25	0,75+1+1

exame de recurso 2015/2016

1.

(a) V

$\varphi = ((\neg p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)) \rightarrow p_0$ tem valor lógico falso se e só se $(\neg p_0 \wedge p_1) \vee (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)$ tem valor lógico verdadeiro e p_0 tem valor lógico falso. Admitamos que p_0 tem valor lógico falso. Se p_1 tem valor lógico falso, $\neg p_0 \wedge p_1$ tem valor lógico falso e $p_0 \leftrightarrow \neg p_1$ tem valor lógico falso. Logo, o antecedente de φ terá valor lógico falso e φ será falso.

(b)

$x \in D$ tal que x é ímpar : $x = -13$
ou $x = 3$
ou $x = 5$

? $\exists y, z \in D : -13 + y = z$? sim $y = 3$, $z = -10$

? $\exists y, z \in D : 3 + y = z$? sim $y = 2$, $z = 5$

? $\exists y, z \in D : 5 + y = z$? sim $y = -2$, $z = 3$

Logo, p é verdadeira para D.

$\neg p \Leftrightarrow \exists x \in D \; (x \text{ é ímpar} \wedge \forall y \in D \forall z \in D \;\; x + y \neq z)$

2. $|x|+1 \in A \Leftrightarrow |x| + 1 = -2 \vee |x|+1 = 1 \vee |x|+1 = 3$

$\Leftrightarrow \underbrace{|x| = -3}_{\text{imp}} \vee |x| = 0 \vee |x| = 2$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$

Portanto, $B = \{0, 2, -2\}$

$B \times A = \{(0,-2), (0,1), (0,3), (2,-2), (2,1), (2,3), (-2,-2),$
$(-2,1), (-2,3)\}$

$A \times A = \{(-2,-2), (-2,1), (-2,3), (1,-2), (1,1), (1,3), (3,-2),$
$(3,1), (3,3)\}$

Assim, $(B \times A) \cap (A \times A) = \{(-2,-2), (-2,1), (-2,3)\}$

(b) $\mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq C \wedge X \subseteq A\}$

$= \{\{\{1,3\}\}, \{-2, \{1,3\}\}, \{1, \{1,3\}\}, C\}$

3.
(a) F Basta considerar $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1,2\}$.

(b) HIPÓTESE: $A \cap B \subseteq C$
$\forall x \; ((x \in A \wedge x \in B) \rightarrow x \in C)$

TESE: $A \subseteq C \cup (A \setminus B)$
$\forall x \; (x \in A \rightarrow x \in C \cup (A \setminus B))$

Seja $x \in A$. Temos dois casos possíveis:

① $x \in B$
Neste caso, $x \in A \cap B$ e, por hipótese, $x \in C$.
Logo, é claro que $x \in C \cup (A \setminus B)$

② $x \notin B$
Então, $x \in A \wedge x \notin B$, donde $x \in A \setminus B$.
Portanto, $x \in C \cup (A \setminus B)$.

4. Seja $\mathcal{P}(n)$ o predicado n^3+2n é divisível por 3

① $n=1$ $\qquad n^3+2n = 1^3+2\times 1 = 3$, que é divisível por 3.

② Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{P}(n)$.
Então n^3+2n é divisível por 3.

Temos que $(n+1)^3+2(n+1) = n^3+3n^2+3n+1+$

$+2n+2 =$

$$= \underbrace{(n^3+2n)}_{\substack{\text{divisível por} \\ \text{3 por HI}}} + \underbrace{(3n^2+3n+3)}_{\substack{\text{divisível} \\ \text{por 3}}}$$

que é divisível por 3.

Por ① e ②, pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ é verdadeiro, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5.

(c) $f(0) = (0,1)$ $\qquad f(2) = (2,3)$
$f(1) = (2,3)$ $\qquad f(3) = (4,5)$

Logo, $f(\{0,1\}) \cap f(\{2,3\}) = \{(0,1),(2,3)\} \cap \{(2,3),(4,5)\}$
$= \{(2,3)\}$

Note-se que se n é ímpar $f(n) = (n+1, n+2)$, pelo que a 1ª coordenada de $f(n)$ é par. Se n é par, $f(n) = (n, n+1)$ e também a 1ª coordenada de $f(n)$ é par. Logo, não existe nenhum n tal que $f(n) = (1,2)$.

$$f(n) = (0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} (n, n+1) = (0,1) \text{ e } n \text{ é par} \\ \text{ou} \\ (n+1, n+2) = (0,1) \text{ e } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$(n, n+1) = (0,1) \Leftrightarrow n = 0$ e 0 é par

$(n+1, n+2) = (0,1) \Leftrightarrow n = -1$ e -1 é ímpar

Portanto, $f^{\leftarrow}(\{(0,1), (1,2)\}) = \{0, -1\}$.

(b) f não é injetiva pois $f(0) = f(-1)$ como referimos em (a)

f não é sobrejetiva pois $\nexists n \in \mathbb{Z}$ $f(n) = (1,2)$, como referimos em (a).

6. $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$x + 3y = 4q$ com $q \in \mathbb{Z}$

$4 \mid (x + 3y)$

(a) $[-4]_R = \{x \in A \mid x - 12 = 4q, \text{ para algum } q \in \mathbb{Z}\}$

$$x - 12 = 4q \Leftrightarrow x = 12 + 4q$$
$$= 4(3+q) \Rightarrow 4 \mid x$$

$[-4]_R = \{-4, 0, 4\}$

$[-3]_R = \{x \in A \mid x - 9 = 4q, \text{ para algum } q \in \mathbb{Z}\}$

$$x - 9 = 4q \Leftrightarrow x = (8 + 4q) + 1$$
$$= 4(2+q) + 1$$

$\Rightarrow x$ tem resto 1 na divisão por 4

$$[-3]_R = \{-3, 1\}$$ $-3-1=-12=4(-3)$
 $1-9=-8=4(-2)$

$$[-2]_R = \{x \in \mathbb{R} : x-6 = 4q, \text{ para algum } q \in \mathbb{Z}\}$$

$x = 6+4q = 4(q+1)+2 \Rightarrow x$ tem resto 2 na divisão por 4

$$[-2]_R = \{-2, 2\}$$ $-2-6=-8=4\times(-2)$
 $2-6=-4=4\times(-1)$

$$[-1]_R = \{x \in \mathbb{R} : x-3 = 4q, \text{ para algum } q \in \mathbb{Z}\}$$

$x = 3+4q \Rightarrow x$ tem resto 3 na divisão por 4

$$[-1]_R = \{-1, 3\}$$

$$A/R = \{\{-4,0,4\}, \{-3,1\}, \{-2,2\}, \{-1,3\}\}$$

(b) Sejam $x, y, z \in A$ tais que xRy e yRz

Temos que $\exists q \in \mathbb{Z}: x+3y = 4q$

e $\exists q' \in \mathbb{Z}: y+3z = 4q'$

Logo $x+3y+y+3z = 4q+4q'$,

pelo que $x+3z = 4\underbrace{(q+q'-y)}_{\in \mathbb{Z}}$

Assim, $\exists_{q''=q+q'-y}: x+3z = 4q''$ e xRz.

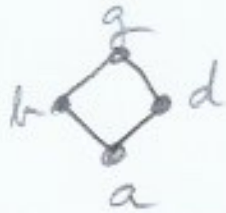
7.

a) i) $\mathrm{Min}(\{d, g, i\}) = \{d, a\}$

ii) $x = c$
$y = e$ $\quad \sup(\{x, y\}) = h$

iii) $z = b$
$w = e$

b) $Y = \{a, b, d, g\}$



$\sup\{b, d\} = g$
$\inf\{b, d\} = a$
os únicos elementos incomparáveis de Y são b e d.

8.

a)

b)

c) NÃO EXISTE

$$\sum_{v \in V} \mathrm{grau}(v) = 2a$$

onde a = nº de arestas

G árvore $\Rightarrow a =$ nº vértices $- 1$

$\Rightarrow$ nº vértices $= a + 1$

a par $\Rightarrow$ G tem um nº ímpar de vértices.
Se todos os vértices tivessem grau ímpar,

$\sum_{v \in V} \mathrm{grau}(v)$ seria ímpar mas $2a$ é par