1º teste 23.nov.2016

TMD

1. $\varphi : p_1 \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_2)$

$\psi : (p_1 \to (\neg p_1 \vee p_2)) \wedge ((p_1 \wedge \neg p_2) \to \neg p_1)$

a) Consideremos a tabela de verdade de φ

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_1 \vee p_2$	$p_1 \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_2)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

O único caso em que φ toma o valor lógico 1 é quando p_1 e p_2 são ambas verdadeiras. Logo, a afirmação é verdadeira

b)

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \vee p_2$	$p_1 \to (\neg p_1 \vee p_2)$	$p_1 \wedge \neg p_2$	$(p_1 \wedge \neg p_2) \to \neg p_1$	ψ
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1

Comparando as tabelas de verdade de φ (na alínea a)) e de ψ, podemos concluir que os valores lógicos destas fórmulas nem sempre são iguais. Portanto, $\varphi \not\Leftrightarrow \psi$ e a afirmação é falsa.

2. a) i) Consideremos $A = \{1,2\}$

Para $y=1$, o único elemento x de A tal que $x \neq y$ é $x=2$. Temos que $xy = 1 \times 2 = 2 > 0$, pelo que $(xy > 0 \vee x^2 + y = 0)$ é verdadeira.

Portanto, p é verdadeira para $A = \{1,2\}$

ii) $A = \{1, -2\}$

Como $(-2)\times 1 = 1 \times (-2) = -2 \not> 0$, $\quad 1^2 + (-2) = -1 \neq 0$ e

$(-2)^2 + 1 = 5 \neq 0$, segue-se que

$$\neg \exists y \in A \; \forall x \in A \; (x \neq y \to (xy > 0 \vee x^2 + y = 0))$$

Logo, p é falsa para $A = \{1, -2\}$.

b) $\neg p \Leftrightarrow \forall y \in A \; \exists x \in A \; (x \neq y \wedge (xy \leq 0 \wedge x^2 + y \neq 0))$

3. a) A afirmação é falsa.
De facto, $p \to q$ pode ser verdadeira com q falsa.
Para tal p terá de ser, também, falsa.
Por exemplo,

$$7^4 + 1 \text{ é ímpar} \to 7^4 \text{ é par}$$

é uma proposição verdadeira e o consequente não é verdadeiro.

b) Consideremos a contrarrecíproca de "$3n+5$ é ímpar $\to$ n é par":

$$n \text{ é ímpar} \longrightarrow 3n+5 \text{ é par}$$

Mostremos que esta implicação é verdadeira.
Para tal, admitamos que n é ímpar e mostremos que $3n+5$ é par. Sendo n ímpar, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k+1$. Assim,

$$\begin{aligned} 3n+5 &= 3(2k+1) + 5 \\ &= 6k + 8 \\ &= 2\underbrace{(3k+4)}_{\in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

e, por conseguinte, $3n+5$ é par.

4.

(a) $$m^2-1 \in B \Leftrightarrow m^2-1=3 \vee m^2-1=4 \vee m^2-1=15$$
$$\Leftrightarrow m^2=4 \vee m^2=5 \vee m^2=16$$
$$\Leftrightarrow m=\pm 2 \vee m=\pm\sqrt{5} \vee m=\pm 4$$

Assim, $$C=\{m\in\mathbb{Z} : m=\pm 2 \vee m=\pm\sqrt{5} \vee m=\pm 4\}$$
$$=\{-4,-2,2,4\}$$

$$(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\mathbb{Z} \wedge y\in\mathbb{Z}$$

Para $x\in A$ e $x\in\mathbb{Z}$, temos de ter $x=3$.

Assim, $y\in\mathbb{Z} \wedge x=3|y| \Leftrightarrow y\in\mathbb{Z} \wedge 3=3|y|$
$$\Leftrightarrow y\in\mathbb{Z} \wedge y=\pm 1$$
$$\Leftrightarrow y=\pm 1.$$

Logo, $$D=\{(3,1),(3,-1)\}$$

(b) $((A\times B)\setminus\{(3,4),(4,3)\}) \not\subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ pois
$$(\{4\},3)\in A\times B\setminus\{(3,4),(4,3)\}$$
e $$(\{4\},3)\notin \mathbb{N}\times\mathbb{N}.$$

[OBS: $A\times B=\{(3,3),(3,4),(3,15),(\{4\},3),(\{4\},4),(\{4\},15)\}$

e $(A\times B)\setminus\{(3,4),(4,3)\}=\{(3,3),(3,15),(\{4\},3),(\{4\},4),$
$(\{4\},15)\}$.]

(c) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{4\}\}, \{3,\{4\}\}\}$

$\left.\begin{array}{l} \emptyset \subseteq B \\ \{3\} \subseteq B \\ \{\{4\}\} \not\subseteq B \\ \{3,\{4\}\} \not\subseteq B \end{array}\right] \longrightarrow$ Logo, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{3\}\}$.

5. (a) A afirmação é verdadeira.

De facto, se $A \subseteq C$, como $A \cap B \subseteq A$, segue-se que $A \cap B \subseteq C$. Se $B \subseteq C$, dado que $A \cap B \subseteq B$, também podemos concluir que $A \cap B \subseteq C$.

(b) Tomando $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ e $C = \emptyset$, temos que

$$(A \times C) \setminus (B \times C) = \emptyset \setminus \emptyset = \emptyset$$

mas $A \not\subseteq B$.

A afirmação é, portanto, falsa.

(c) Consideremos $A = \{1\}$ e $B = \{\{1\}\}$.

Temos que $B = \{A\}$, pelo que $A \in B$.

Além disso, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ e $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\{1\}\}\}$. Como $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$ mas $\{1\} \notin \mathcal{P}(B)$, segue-se que $\mathcal{P}(A) \not\subseteq \mathcal{P}(B)$.

Assim, a afirmação é falsa.

6.

Sabemos que $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

Logo,

$$(A \cup B) \setminus (B \cap C) = \big((A \cup B) \setminus B\big) \cup \big((A \cup B) \setminus C\big)$$

Assim, para todo o objeto x,

$$x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow x \in \big((A \cup B) \setminus B\big) \cup \big((A \cup B) \setminus C\big)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus B \quad \vee \quad x \in (A \cup B) \setminus C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B \wedge x \notin B) \vee (x \in (A \cup B) \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B) \vee ((x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee \underbrace{(x \in B \wedge x \notin B)}_{i(x)} \vee (x \in A \wedge x \notin C) \vee$$

$$\vee (x \in B \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \quad \vee \quad x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C$$

$$\Leftrightarrow x \in \quad (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

Logo,

$$(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

7. [OBS: este exercício é relativo ao Capítulo 3 – Indução nos naturais]

Seja $P(n)$ o predicado

$$2 + 6 + \ldots + 10 + (4n-2) = 2n^2$$

sobre $n \in \mathbb{N}$.

① Como
$$2 = 2 \times 1^2,$$ temos que $P(1)$ é verdadeira.

② Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(n)$ é verdadeira.

Então,
$$2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) = 2n^2 \qquad (\text{H.I.}).$$

Mostremos que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja, que
$$2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) + (4(n+1)-2) = 2(n+1)^2.$$

Temos que
$$2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) + (4(n+1)-2) \underset{HI}{=}$$
$$= 2n^2 + (4(n+1)-2) = 2n^2 + 4n + 4 - 2$$
$$= 2n^2 + 4n + 2$$
$$= 2(n+1)^2$$

Logo, $P(n+1)$ é verdadeira.

Por ① e ②, pelo Princípio de Indução nos Naturais, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.