Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
2016/2017

Tópicos de Matemática Discreta

2.^{o} teste — 13 de janeiro de 2017 — duração: 2 horas

1. Sejam $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \geq 8 \text{ e } x \text{ é par}\}$, $f : \mathbb{N} \to A$, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to A$ as funções definidas por

$$f(m) = \begin{cases} m+7 & \text{se} \quad m \text{ é ímpar} \\ 2m+4 & \text{se} \quad m \text{ é par} \end{cases}, \qquad h(m) = 2m-1 \quad \text{e} \quad g(m) = 2m+6.$$

   (a) Determine $f(\{3,4,5\})$ e $f^{\leftarrow}(\{12,18\})$. Apresente os cálculos que efetuar.
   (b) Diga, justificando, se f é injetiva e se f é sobrejetiva.
   (c) Verifique que $f \circ h = g$.
   (d) Justifique que a função g é invertível e determine a sua inversa.
   (e) Conclua que a afirmação seguinte nem sempre é verdadeira: Se $f_1 : B \to C$ e $f_2 : C \to D$ são funções tais que $f_2 \circ f_1$ é uma função bijetiva, então f_1 e f_2 são funções bijetivas.

2. Sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$ e S a relação binária em A definida por

$$S = \{(1,3),(2,4),(3,1),(4,5),(5,3)\}.$$

   (a) Sem justificar, dê exemplo de uma relação binária $T \neq \emptyset$ em A tal que $T \subseteq S$ e $T \subseteq S^{-1}$.
   (b) Diga, justificando, se $\mathrm{Im}(S \circ S) = \mathrm{Im}(S)$.

3. Seja R a relação binária definida em $\mathbb{R}$ por

$$m \, R \, n \text{ se e só se } |m-n| \leq 1.$$

   Diga, justificando, se a relação R é:

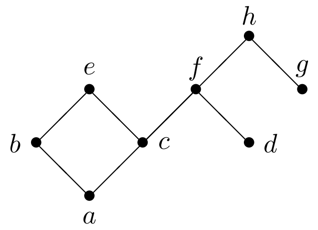
   (a) reflexiva.
   (b) simétrica.
   (c) antissimétrica.
   (d) transitiva.

4. Sejam $A = \{1,2,7,15,20,30,32\}$ e R a relação de equivalência definida em A por

$$x \, R \, y \text{ sse } x \text{ e } y \text{ têm o mesmo número de divisores naturais primos.}$$

   (a) Mostre que a relação binária R é, efetivamente, transitiva.
   (b) Determine $[1]_R$. Justifique a sua resposta.
   (c) Determine A/R. Justifique a sua resposta.

5. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse associado:



Indique, sem justificar,

(a) os elementos maximais e os elementos minimais de A.

(b) o conjunto dos majorantes de $\{c, d\}$.

(c) um subconjunto de A com elemento minimal mas sem elemento mínimo.

(d) um subconjunto de A de cardinal 2 que não tenha supremo.

6. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

(a) Existem funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ tais que f não é injetiva e $g \circ f$ é uma função injetiva.

(b) Existe uma relação de equivalência R em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/R = \{\mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$.

(c) Se R e S são relações binárias num conjunto A tais que $R \cap S$ é antissimétrica, então R e S são antissimétricas.

(d) $U = \{(1,1), (2,2), (3,2), (3,3), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,5)\}$ é uma relação de ordem parcial no conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.
	1+1+1+1+0,5	0,5+1	0,75+0,75+0,75+0,75	1+1+1	1+1+1+1	1+1+1+1