1.

(a) $f(\{3,4,5\}) = \{f(3), f(4), f(5)\}$

$f(3) = 3+7 = 10$
$f(4) = 2\times 4 + 4 = 12$
$f(5) = 5+7 = 12$

Logo, $f(\{3,4,5\}) = \{10,12\}$.

$f^{\leftarrow}(\{12,18\}) = \{m \in \mathbb{N} \mid f(m) = 12 \vee f(m) = 18\}$

$$\begin{aligned} f(m) = 12 &\Leftrightarrow (m+7 = 12 \wedge m \text{ é ímpar}) \vee (2m+4 = 12 \wedge m \text{ é par}) \\ &\Leftrightarrow (m = 5 \wedge m \text{ é ímpar}) \vee (m = 4 \wedge m \text{ é par}) \\ &\Leftrightarrow m = 5 \vee m = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(m) = 18 &\Leftrightarrow (m+7 = 18 \wedge m \text{ é ímpar}) \vee (2m+4 = 18 \wedge m \text{ é par}) \\ &\Leftrightarrow (m = 11 \wedge m \text{ é ímpar}) \vee (m = 7 \wedge m \text{ é par}) \\ &\Leftrightarrow m = 11 \end{aligned}$$

Assim, $f^{\leftarrow}(\{12,18\}) = \{4,5,11\}$.

(b) Como $f(4) = f(5) = 12$, f não é injetiva.

Seja $x \in A$. Então, $x \geq 8$ e x é par. Logo, $x - 7 \in \mathbb{N}$ e $x-7$ é ímpar. Assim, $f(x-7) = (x-7)+7 = x$. Portanto, para todo $x \in A$, existe $m = x-7 \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = x$, ou seja, f é sobrejetiva.

(c) $f \circ h$ é uma função de $\mathbb{N}$ em A. Também g é uma função de $\mathbb{N}$ em A. Para todo o objeto m de $\mathbb{N}$,

$$(f\circ h)(m) = f(h(m)) = f(2m-1) \underset{\substack{\downarrow \\ 2m-1 \text{ é} \\ \text{ímpar}}}{=} (2m-1)+7$$

$$= 2m+6 = g(m).$$

Portanto, $f \circ h = g$.

(d) Dados $m, n \in \mathbb{N}$,

$$g(m) = g(n) \Leftrightarrow 2m+6 = 2n+6$$
$$\Leftrightarrow 2m = 2n$$
$$\Leftrightarrow m = n.$$

Logo, g é injetiva.

Dado $x \in A$,

$$g(m) = x \Leftrightarrow 2m+6 = x$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{x-6}{2}$$

Como $x \geq 8$ e é par, $x-6 \geq 0$ e $x-6$ é par.

Portanto, $m = \frac{x-6}{2} \in \mathbb{N}$. Assim, $\forall_{x \in A} \exists_{m \in \mathbb{N}}: g(m) = x$,

ou seja, g é sobrejetiva.

Sendo injetiva e sobrejetiva, g é bijetiva e, portanto, invertível. A sua inversa é a função $g^{-1}: A \longrightarrow \mathbb{N}$
$$x \longmapsto \frac{x-6}{2}$$

(e) A afirmação é falsa: basta considerar $f_1 = h$ e $f_2 = f$. Vimos, em (c), que $f_2 \circ f_1 = g$. Em (d) provámos que g é bijetiva. Assim, $f_2 \circ f_1$ é bijetiva. Mas, de (b), sabemos que f_1 não é bijetiva.

2. a) $S = \{(1,3), (2,4), (3,1), (4,5), (5,3)\}$
$S^{-1} = \{(3,1), (4,2), (1,3), (5,4), (3,5)\}$

$$S \cap S^{-1} = \{(1,3), (3,1)\}$$

Consideremos, por exemplo, $T = \{(1,3)\}$.

(b) $S \circ S = \{(1,1),(2,5),(3,3),(4,3),(5,1)\}$

$$\left[\begin{array}{l} (1,3)\in S,\ (3,1)\in S \Rightarrow (1,1)\in S\circ S \\ (2,4)\in S,\ (4,5)\in S \Rightarrow (2,5)\in S\circ S \\ (3,1)\in S,\ (1,3)\in S \Rightarrow (3,3)\in S\circ S \\ (4,5)\in S,\ (5,3)\in S \Rightarrow (4,3)\in S\circ S \\ (5,3)\in S,\ (3,1)\in S \Rightarrow (5,1)\in S\circ S \end{array}\right]$$

Assim, $Im(S\circ S) = \{1,5,3\}$. Como $Im(S) = \{1,3,4\}$, $Im(S\circ S) \neq Im(S)$.

3.

(a) R é reflexiva. De facto, dado $m \in \mathbb{R}$, $|m-m| = |0| = 0 \leq 1$. Logo, $\forall m \in \mathbb{R}\ mRm$.

(b) R é simétrica. Com efeito, se mRn então nRm, para quaisquer $m,n\in\mathbb{R}$: Dados $m, n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} mRn &\Leftrightarrow |m-n| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow |n-m| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow nRm \end{aligned}$$

(c) R não é antissimétrica, já que $1R2$ e $2R1$. Com efeito, $|1-2| \leq 1$ e $|2-1| \leq 1$.

(d) R não é transitiva, pois $1R2$ e $2R3$, mas $1 \not R 3$. De facto, $|1-2| \leq 1$, $|2-3| \leq 1$ mas $|1-3| = 2 \not\leq 1$.

4.

(a) Sejam $x, y, z \in A$ tais que xRy e yRz. Então, x e y têm o mesmo número de divisores naturais primos e y e z têm o mesmo número de divisores naturais primos. Logo, também x e z têm o mesmo número de divisores naturais primos, ou seja, xRz.

Assim, R é transitiva.

(b) Consideremos a seguinte tabela:

$x \in A$	Fatorização em primos de x	número de Divisores naturais primos de x
1	—	0 (não tem)
2	2	1 (o 2)
7	7	1 (o 7)
15	3×5	2 (o 3 e o 5)
20	$2\times2\times5$	2 (o 2 e o 5)
30	$2\times3\times5$	3 (o 2, o 3 e o 5)
32	$2\times2\times2\times2\times2$	1 (o 2)

$[1]_R = \{x\in A \mid x\,R\,1\}$

$= \{x\in A \mid x$ e 1 têm o mesmo número de divisores naturais primos$\}$

$= \{x\in A \mid x$ tem 0 divisores naturais primos$\}$

$= \{1\}$.

(c) $A/R = \{ [x]_R \mid x\in A\}$

$= \{ \{1\}, \{2,32,7\}, \{15,20\}, \{30\}\}$

[1 tem 0 divisores naturais primos; 2, 7 e 32 têm 1 divisor natural primo; 15 e 20 têm 2 divisores naturais primos; 30 tem 3 divisores naturais primos].

5. (a) elementos maximais: e, h
elementos minimais: a, d, g

(b) $\mathrm{Maj}(\{c,d\}) = \{f, h\}$

(c) $\{c, f, d\}$ tem dois elementos minimais (c e d) mas não tem elemento mínimo.

(d) $\{b, d\}$ (note-se que $\mathrm{Maj}(\{b,d\}) = \emptyset$).

6.

(a) Se f é não injetiva, existem $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$ e $x_1 \neq x_2$.

Sendo g uma função, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, pelo que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Assim, $g \circ f$ não pode ser injetiva.

A afirmação é, pois, falsa.

(b) $\{\mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$ não é uma partição de $\mathbb{N}$ pois $\mathbb{N} \cap \mathbb{N} \setminus \{1\} \neq \emptyset$

logo, tal R não existe. A afirmação é falsa.

(c) Sejam $A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(1,3),(3,1),(2,4)\}$ e $S = \{(1,3),(2,4),(4,2)\}$. Temos que $R \cap S = \{(1,3),(2,4)\}$

é antissimétrica mas R e S não são antissimétricas.

A afirmação é falsa.

(d) Temos que $id_A \subseteq U$ (de facto, $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5) \in U$) logo, U é reflexiva.

$$U \cap U^{-1} = U \cap \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3),(5,3),(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(5,5)\} = id_A$$

Portanto, U é antissimétrica.

$$U \circ U = \{(1,1),(2,2),(3,2),(3,3),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,5)\}$$

$$= U.$$

Assim, U é transitiva. Podemos, então, concluir que U é ordem parcial em A e a afirmação é verdadeira.

(obs: o diagrama de Hasse seria: