Universidade do Minho — Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Dep. Matemática e Aplicações — 2016/2017

Tópicos de Matemática Discreta

exame de recurso — 4 de fevereiro de 2017 — duração: 2 horas

1. (a) Considere as fórmulas proposicionais $\varphi : (\neg p_0 \to (p_1 \vee p_2))$ e $\psi : \neg(p_0 \to \neg(p_1 \to p_2))$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: A fórmula φ tem valor lógico verdadeiro sempre que a fórmula ψ tem valor lógico verdadeiro.

   (b) Considere que $p(x)$, $q(x)$ e $d(x,y)$ representam os predicados

   $p(x)$: x é par
   $q(x)$: x é primo
   $i(x)$: x é ímpar
   $d(x,y)$: x é um divisor de y

   (i) Diga, justificando, se alguma das seguintes proposições é verdadeira:

   $$r : \forall_{y\in I\!N}\, (p(y) \to \forall_{x\in I\!N}\ (d(x,y) \to p(x)))$$
   $$s : \forall_{y\in I\!N}\, (q(y) \to \forall_{x\in I\!N}\ (p(x) \to \neg d(x,y)))$$

   (ii) Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg r$.

2. (a) Considere os conjuntos

   $$A = \{\emptyset, \{2\}, 3, 7\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x+2 \in A\} \text{ e } C = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,|\, x \in B \wedge |y| = x\}.$$

   Justificando, determine $C \setminus (B \times B)$.

   (b) Indique conjuntos D e E tais que $D \cap E = \{2\}$ e $\mathcal{P}(E) \setminus D = \{\emptyset, \{3,4\}\}$.

3. Prove que, para quaisquer conjuntos A, B e C, $(A \cup C) \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup C$.

4. Prove, por indução nos naturais, que $1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + (4n-3) = \frac{1}{2}n(4n-2)$, para todo o natural n.

5. Considere as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas da seguinte forma

   $$f(n) = (n^2, n^2),\ \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \text{e} \qquad g(p,q) = \begin{cases} p - q + 2 & \text{se } q \geq 0 \\ 2 & \text{se } q < 0 \end{cases},\ \forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

   (a) Determine $g(\{(3,2),(2,-1),f(2)\})$ e $g^{\leftarrow}(\{2\})$.

   (b) Diga, justificando, se g é injetiva e se é sobrejetiva.

   (c) Diga, se $g \circ f$ é uma função constante. Justifique a sua resposta.

6. Seja R a relação de equivalência em $\mathbb{R}$ definida por:

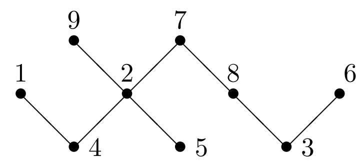
   $$xRy \text{ se e só se } x^2 - y^2 = x - y.$$

   (a) Indique, sem justificar, $[1]_R$ e $[-2]_R$.

   (b) Mostre que, de facto, R é uma relação transitiva.

7. Considere o conjunto $A = \{a, b, c\}$, onde a, b, c são distintos entre si. Indique uma relação de equivalência ρ em A tal que $[a]_\rho = [c]_\rho$ e $(a, b) \notin \rho$

8. Consideremos o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse associado:



Indique, sem justificar,

(a) os elementos maximais e os elementos minimais de $\{2, 4, 5, 7, 9\}$.

(b) o conjunto dos majorantes de $\{4, 5\}$.

(c) um subconjunto X de A tal que $8 \in \mathrm{Maj(X)}$ e $8 \neq \sup(\mathrm{X})$.

(d) um subconjunto Y de A que não tenha mínimo mas que tenha ínfimo.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
	1,5+1,5+1	1,25+1,25	1,25	1,5	1+1,5+1	1+1,25	1	1+1+1+1