TMD

Exame de Recurso 2016/2017

4/fev/2017

1. (a)

p_0	p_1	p_2	$p_1 \vee p_2$	$\neg p_0$	φ	$p_1 \to p_2$	$\neg(p_1 \to p_2)$	$p_0 \to \neg(p_1 \to p_2)$	ψ
1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0

Se ψ tem valor lógico 1, então temos os casos descritos na 1ª, na 3ª e na 4ª linhas da tabela. Nesses casos, φ também tem valor lógico 1. A afirmação é, portanto, verdadeira.

(b)

(i) $r: \ \forall_{y \in \mathbb{N}} \ (y \text{ par} \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{N}} \ (x | y \Rightarrow x \text{ é par}))$

Em r, afirma-se que os divisores naturais dos números pares são pares, o que não é verdade

$y = 6$ é par, $x=3$ é tal que x é um divisor de y, mas x não é par.

$s: \ \forall_{y \in \mathbb{N}} \ (y \text{ primo} \Rightarrow (\forall_{x \in \mathbb{N}} \ (x \text{ par} \Rightarrow x \nmid y)))$

Em s, afirma-se que não há divisores pares de um número primo, o que é falso pois 2 é primo e o próprio 2 é um seu divisor natural par.

Assim, nenhuma das proposições é verdadeira.

recurso
2016/17

(ii) $\neg r \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}\ (p(y) \wedge (\exists x \in \mathbb{N}\ (d(x,y) \wedge \neg p(x))))$

$\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}\ (p(y) \wedge (\exists x \in \mathbb{N}\ (d(x,y) \wedge i(x))))$ (nesta última fórmula não ocorre o conectivo $\neg$)

2.

(a) $x+2 \in A \Leftrightarrow x+2=3 \vee x+2=7$ (não faz sentido $x+2=\emptyset$ ou $x+2=\{2\}$)

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=5$

Logo, $B=\{1,5\}$ e $B\times B=\{(1,1),(1,5),(5,1),(5,5)\}$

$x\in B \wedge |y|=x \Leftrightarrow (x=1$ e $|y|=1)$ ou $(x=5 \wedge |y|=5)$

$\Leftrightarrow (x=1 \wedge y=\pm 1)$ ou $(x=5 \wedge y=\pm 5)$.

Assim,

$$C=\{(1,1),(1,-1),(5,5),(5,-5)\}$$

Portanto, $C\setminus(B\times B)=\{(1,-1),(5,-5)\}$.

(b) $\mathcal{P}(E)\setminus D=\{\emptyset,\{3,4\}\} \Rightarrow \{3,4\}\notin D$ e $3\in E$ e $4\in E$.

Se $3\in E$, $\{3\}\in\mathcal{P}(E)$. Como $\{3\}\notin\mathcal{P}(E)\setminus D$, $\{3\}\in D$

Como $4\in E$, $\{4\}\in\mathcal{P}(E)$. Assim, $\{4\}\in D$.

$D\cap E=\{2\} \Leftrightarrow 2\in D$ e $2\in E$.

Como $2\in E$ e $\{2\}\notin\mathcal{P}(E)\setminus D$, $\{2\}\in D$. Como 2 e 4 são elementos de E e $\{2,4\}\notin\mathcal{P}(E)\setminus D$, então $\{2,4\}\in D$. O mesmo para $\{2,3\}$ e $\{2,3,4\}$

Consideremos $E=\{2,3,4\}$

e $D=\{2,\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,3,4\}\}$.

$(\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{2,3,4\}\})$

Março
2016/2017

3. Suponhamos que $(A \cup C) \setminus (B \setminus C) \not\subseteq (A \setminus B) \cup C$. Então, existe pelo menos um elemento x tal que $x \in (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$ e $x \notin (A \setminus B) \cup C$.
Ora,

$$x \in (A\cup C)\setminus(B\setminus C) \Leftrightarrow x \in A\cup C \wedge x \notin (B\setminus C)$$
$$\Leftrightarrow x \in A\cup C \wedge (x \notin B \vee x \in C)$$

e

$$x \notin (A\setminus B)\cup C \Leftrightarrow x \notin (A\setminus B) \wedge x \notin C$$
$$\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge x \notin C.$$

De $x \in A \cup C$ e $x \notin C$, concluímos que $x \in A$. Logo, de $x \notin A \vee x \in B$, concluímos que $x \in B$. Repare-se que

$$x \in A, \; x \in B \text{ e } x \notin C$$

contradiz a condição $x \notin B \vee x \in C$.

A contradição resultou de supormos $(A\cup C)\setminus(B\setminus C) \not\subseteq (A\setminus B)\cup C$.
Logo,

$$(A\cup C)\setminus(B\setminus C) \subseteq (A\setminus B)\cup C.$$

4. Seja $P(n)$ o predicado $1+5+9+\dots+(4n-3) = \frac{1}{2}n(4n-2)$ sobre $n \in \mathbb{N}$.

① $1 = \frac{1}{2}\times 1(4\times 1-2) \Leftrightarrow 1 = 1$ (P.V.)
Logo, $P(1)$.

② Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $1+5+9+\dots+(4k-3) = \frac{1}{2}k(4k-2)$. (H.I).

Mostremos que $1+5+9+\dots+(4(k+1)-3) = \frac{1}{2}(k+1)(4(k+1)-2)$.

Temos

$$1+5+9+\dots+(4k-3)+(4(k+1)-3) = \frac{1}{2}(k+1)(4(k+1)-2) \Leftrightarrow$$

$$\underset{HI}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}k(4k-2) + (4(k+1)-3) = \frac{1}{2}(k+1)(4(k+1)-2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} k (4k-2) + (4k+1) = \frac{1}{2} (k+1)(4k+2)$

$\Leftrightarrow \quad 2k^2 - k + 4k + 1 = 2k^2 + k + 2k + 1$

$\Leftrightarrow \quad 2k^2 + 3k + 1 = 2k^2 + 3k + 1$, o que é verdade.

Logo, $P(k+1)$.

Por ① e ②, pelo Princípio de Indução Estrutural, $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.

5.

(a) $g((3,2)) = 3 - 2 + 2 = 3$

$g((2,-1)) = 2$

$f(2) = (2^2, 2^2) = (4,4)$

$g((4,4)) = 4 - 4 + 2 = 2$

Assim, $g(\{(3,2), (2,-1), f(2)\}) = \{2, 3\}$.

$$\begin{aligned} g^{\leftarrow}(\{2\}) &= \{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : g(p,q) = 2\} \\ &= \{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : q < 0 \lor (p - q + 2 = 2 \land q \geq 0)\} \\ &= \{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : q < 0 \lor (p = q \land q \geq 0)\} \\ &= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^- \cup \{(q,q) : q \in \mathbb{Z}_0^+\}. \end{aligned}$$

(b) Como $g((2,-1)) = g((4,4)) = 2$, g não é injetiva.

Averiguemos se g é sobrejetiva. Seja $m \in \mathbb{Z}$. Vejamos se existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $m = g(p,q)$.

$$m = g(p,q) \Leftrightarrow \begin{cases} m = p - q + 2 \land q \geq 0 \\ m = 2 \land q < 0 \end{cases}$$

recurso 2016/17

? $n = p - q + 2$? $\quad (q \geq 0)$

Podemos escrever $\quad n = \underbrace{(n-1)}_{p} - \underbrace{1}_{q} + 2$

Logo, $\quad n = g((n-1), 1)$ e g é sobrejetiva.

(c) $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Dado $n \in \mathbb{Z}$, $\quad (g \circ f)(n) = g(f(n)) = g((n^2, n^2)) =$

$$\underset{n^2 \geq 0}{=} n^2 - n^2 + 2 = 2.$$

Logo, $g \circ f$ é uma função constante.

6.

$$xRy \Leftrightarrow (x^2 - y^2) = x - y \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = (x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) - (x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \lor x + y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \lor x + y = 1.$$

(a) $[1]_R = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \lor x + 1 = 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \lor x = 0\} = \{0, 1\}.$

$[-2]_R = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -2 \lor x - 2 = 1\} = \{-2, 3\}$

(b) Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que xRy e yRz. Temos

xRy e $yRz \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \land y^2 - z^2 = y - z$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z$$

$$\Leftrightarrow x^2 - z^2 = x - z \Rightarrow xRz.$$

Logo, R é transitiva.

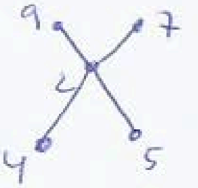
7. $[a]_\rho = [c]_\rho \Rightarrow a \rho c$ e $c \rho a$

$(a,b) \notin \rho \Rightarrow [b]_\rho \neq [a]_\rho \Rightarrow b \not\rho a$ e $a \not\rho b$

Logo, $[b]_\rho \neq [c]_\rho \Rightarrow b \not\rho c$ e $c \not\rho b$.

$\rho = \{ (a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a) \}$.

8. (a)



elementos maximais de $\{2,4,5,7,9\}$

$9, 7$

elementos minimais de $\{2,4,5,7,9\}$

$4, 5$

(b) $Maj(\{4,5\}) = \{2,9,7\}$

(c) $X = \{3\}$ $\quad Maj(X) = \{3,8,6,7\}$, $\sup(X) = 3$

(d) $Y = \{9,7\}$ $\quad Min(Y) = \{2,4,5\}$

$\inf(Y) = 2$