1º teste TMD
2017/2018
3. novembro

1. a) Temos que

i) $p_0, p_1 \in \mathcal{F}^{CP}$ pois são variáveis proposicionais (regra (F2));

ii) $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$ (regra (F1));

iii) Por i) e pela regra (F6), $(p_0 \to p_1) \in \mathcal{F}^{CP}$;

iv) Por i) e pela regra (F3), $(\neg p_1) \in \mathcal{F}^{CP}$;

v) Por ii), iv) e pela regra (F5), $\perp \vee (\neg p_1) \in \mathcal{F}^{CP}$;

vi) Por v) e pela regra (F3), $(\neg(\perp \vee (\neg p_1))) \in \mathcal{F}^{CP}$;

vii) Por iii), vi) e pela regra (F5), $((p_0 \to p_1) \vee (\neg(\perp \vee (\neg p_1)))) \in \mathcal{F}^{CP}$.

Assim, a afirmação é verdadeira.

b)

p_0	p_1	$\psi: p_0 \leftrightarrow p_1$	$p_0 \to p_1$	$p_0 \wedge (p_0 \to p_1)$	$\varphi: \neg(p_0 \wedge (p_0 \to p_1))$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1

A afirmação é falsa: como podemos ver na última linha da tabela de verdade, ψ tem valor lógico verdadeiro mas φ não tem valor lógico falso quando ambas as variáveis proposicionais p_0 e p_1 são falsas.

c) Temos dois casos possíveis : (1) σ e θ têm valor lógico 1
(2) σ e θ têm valor lógico 0.

No caso (1), $\neg\theta$ tem valor lógico 0, pelo que $(\sigma \vee \theta) \wedge \neg\theta$ tem também valor lógico 0.

No caso (2), $(\sigma \vee \theta)$ tem valor lógico 0, donde $(\sigma \vee \theta) \wedge \neg\theta$ tem valor lógico 0.

Assim, $(\sigma \vee \theta) \wedge \neg\theta$ tem sempre valor lógico 0 e, portanto, é uma contradição. A afirmação é verdadeira.

2.

p: $\forall_{x\in A} \quad ((\exists_{y\in A} \ x=5y) \rightarrow (y=2 \vee y^2=9))$

(a) i) $A = \{2,3,10,15\}$

- $x=2$ Não existe $y\in A$ tal que $x=5y$.
  Logo, $\exists y\in A \ x=5y$ é falsa
  e $(\exists y\in A \ x=5y) \rightarrow (y=2 \vee y^2=9)$ é verdadeira.

- $x=3$ Não existe $y\in A$ tal que $x=5y$.
  Assim, $\exists y\in A \ x=5y$ é falsa
  e $(\exists y\in A \ x=5y) \rightarrow (y=2 \vee y^2=9)$ é verdadeira.

- $x=10$ $x=5\times 2$ e $2\in A$.
  Logo, $\exists y\in A \ x=5y$ é verdadeira.
  Temos que $10=5y \Leftrightarrow y=2$. Assim,
  $y=2 \vee y^2=9$ é, também, verdadeira.
  Portanto,
  $(\exists y\in A \ x=5y) \rightarrow (y=2 \vee y^2=9)$ é verdadeira.

- $x=15$ $x=5\times 3$ e $3\in A$
  Portanto, $\exists y\in A \ x=5y$ é verdadeira
  Além disso, $10=5y \Leftrightarrow y=3$. Ora, $3^2=9$.
  Assim, $y^2=9$ é verdadeira, pelo que $y=2 \vee y^2=9$
  é, também, verdadeira.
  Logo, $(\exists y\in A \ x=5y) \rightarrow (y=2 \vee y^2=9)$ é verdadeira.

Portanto, p é verdadeira para $A=\{2,3,10,15\}$.

ii) $A = \{3, 5, 15, 25\}$

Consideremos $x = 25$. Temos que $\exists y \in A \; x = 5y$. De facto,

$$x = 5y \iff 25 = 5y \iff y = 5$$

No entanto, $y \neq 2$ e $y^2 = 9$. Portanto, para $x = 25$,

$$(\exists y \in A \;\; x = 5y) \rightarrow (y = 2 \vee y^2 = 9)$$

é falsa.

Assim, p é falsa para $A = \{3, 5, 15, 25\}$.

b) $\neg p \iff \exists x \in A \; (\exists y \in A \;\; x = 5y \wedge (y \neq 2 \wedge y^2 \neq 9))$

3. a) A afirmação é falsa. Se q é verdadeira e p falsa, $(p \vee q) \rightarrow r$ só será verdadeira se r for verdadeira.

[Por exemplo, para $m, n \in \mathbb{N}$, se p, q e r são as seguintes afirmações:

p: m é par
q: n é par
r: $m+n$ é par,

temos que para $m = 3$ e $n = 2$, $(p \vee q) \rightarrow r$ é falsa, apesar de r ser falsa e p ser falsa.]

b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Pretendemos mostrar que $p \rightarrow q$ é verdadeira, onde

p: $(n+1)^2$ não é divisível por 7

e

q: $3n^2 + 6n - 18$ não é divisível por 21.

Consideremos a contrarrecíproca $\neg q \rightarrow \neg p$:

Se $3n^2 + 6n - 18$ é divisível por 21, então $(n+1)^2$ é divisível por 7.

Mostremos que $\neg q \to \neg p$ é verdadeira.
Para tal, admitamos que $3m^2+6m-18$ é divisível por 21.

Então, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$3m^2+6m-18 = 21K.$$

Assim,
$$3(m^2+2m-6) = 3\times 7K,$$

donde
$$m^2+2m-6 = 7K.$$

Logo,
$$(m^2+2m+1)-6-1 = 7K,$$

ou seja,
$$(m+1)^2 = 7K+7 = 7(K+1).$$

Como $K+1 \in \mathbb{N}$, $(m+1)^2$ é divisível por 7.

Provámos que $\neg q \to \neg p$ é verdadeira. Portanto, $p \to q$ também é verdadeira.

4. (a) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in A\}$

$x^2 \in A \Leftrightarrow x^2 = -5 \vee x^2 = 5 \vee x^2 = \{4\} \vee x^2 = 9$
$\Leftrightarrow i(x) \vee x = \pm\sqrt{5} \vee i(x) \vee x = \pm 3.$

Assim, $B = \{-3, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, 3\}.$

(b) C tem 3 elementos. Logo, $\mathcal{P}(C)$ tem $2^3 = 8$ elementos. Os elementos de $\mathcal{P}(C) \setminus A$ são os elementos de $\mathcal{P}(C)$ que não estão em A.

O único elemento de A que é um conjunto é $\{4\}$ que, de facto, pertence a $\mathcal{P}(C)$. Portanto, $\mathcal{P}(C)\setminus A$ tem 7 elementos.

(c) Os elementos de $C\times D$ são pares ordenados (c,d) onde $c\in C$ e $d\in D$.

Logo, $\emptyset\notin C\times D$ e $\{4,2\}\notin C\times D$, pois não são pares ordenados.

Como $1\notin C$, $(1,4)\notin C\times D$.

Dado que $\{5,9\}\in C$ e $1\in D$, segue-se que $(\{5,9\},1)\in C\times D$.

Assim,

$$(C\times D)\cap\{\emptyset,(1,4),\{4,2\},(\{5,9\},1)\}=\{(\{5,9\},1)\}.$$

5.

(a) A afirmação é falsa. Consideremos

$$A=\{1\}$$
$$B=\{2\}$$
$$C=\{3\}$$
e
$$D=\{4\}.$$

Temos que $(A\cup B)\cap D=\emptyset=(A\cup C)\cap D$, mas $B\neq C$.

(b) A afirmação é falsa. Sejam

$A=\{1,2\}$, $C=\{4,5\}$,
$B=\{2,3\}$ e $D=\{5,6\}$.

$$(A\setminus B)\times(C\setminus D)=\{1\}\times\{4\}=\{(1,4)\}$$
$$(A\times C)\setminus(B\times D)=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5)\}\setminus\{(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)\}=$$

$= \{(1,4), (1,5), (2,4)\}$.

Logo,

$$(A\setminus B)\times(C\setminus D) \neq (A\times C)\setminus(B\times D)$$

(c) A afirmação é verdadeira.

Como $A \in \mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, temos que $A \in \mathcal{P}(B)$. Portanto, $A \subseteq B$.

6. Para todo o objeto x,

$$\begin{aligned}
x \in (A\cup B)\setminus(B\cap C) &\Leftrightarrow x \in A\cup B \wedge x \notin B\cap C \\
&\Leftrightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge x \notin B\cap C \\
&\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B\cap C) \vee (x\in B \wedge x\notin B\cap C) \\
&\Leftrightarrow x\in A\setminus(B\cap C) \vee (x\in B \wedge (x\notin B \vee x\notin C)) \\
&\Leftrightarrow x\in A\setminus(B\cap C) \vee \underbrace{(x\in B \wedge x\notin B)}_{F(x)} \vee \\
&\qquad \vee (x\in B \wedge x\notin C) \\
&\Leftrightarrow x\in A\setminus(B\cap C) \vee x\in B\setminus C \\
&\Leftrightarrow x \in (A\setminus(B\cap C)) \cup (B\setminus C)
\end{aligned}$$

Assim,

$$(A\cup B)\setminus(B\cap C) = (A\setminus(B\cap C))\cup(B\setminus C).$$