1. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$: $p(n)$

① $1^3 = \frac{1^2 (1+1)^2}{4} \Leftrightarrow 1 = \frac{1 \times 4}{4} \Leftrightarrow 1 = 1$ P.V.

Logo, $P(1)$

② Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$, ou seja,

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2 (k+1)^2}{4} \quad (HI)$$

Pretendemos verificar que

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 ((k+1)+1)^2}{4}$$

Temos que

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\underset{HI}{\Leftrightarrow} \frac{k^2 (k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2 (k+1)^2}{4} + (k+1)(k+1)^2 = \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4},$$

o que é verdade. Logo, $p(k+1)$.

Pelo P. Indução Estrutural, por ① e ②, segue-se que $p(n)$ é V para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. a) $f(\{-1, 0, 3\}) = \{f(-1), f(0), f(3)\}$

$f(-1) = -2(-1) = 2$; $f(0) = 5$; $f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$.

Assim, $f(\{-1, 0, 3\}) = \{2, 5\}$.

b) Temos que $f^{\leftarrow}(B) = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) \in B\}$

$f(0) = 5, \quad f(3) = 5, \quad f(9) = 17$

Note-se que $f(x) = 5 \Leftrightarrow (2x-1 = 5 \wedge x > 0) \vee x = 0 \vee (-2x = 5 \wedge x < 0)$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 0$

e $f(x) = 17 \Leftrightarrow (2x-1 = 17 \wedge x > 0) \vee (-2x = 17 \wedge x < 0)$

$\Leftrightarrow x = 9$

Portanto, $B = \{5, 17\}$ é tal que $f^{\leftarrow}(B) = \{0, 3, 9\}$.

c) Sejam $C = \{1, 3\}$ e $D = \{0, 1\}$.

Temos que

$f(C \cap D) = f(\{1\}) = \{1\}$

e

$f(C) \cap f(D) = \{1, 5\} \cap \{5, 1\} = \{1, 5\}$,

pelo que $f(C \cap D) \neq f(C) \cap f(D)$.

Como $f(0) = f(3) = 5$, f não é injetiva.

d) Dado $n \in \mathbb{N}$, ① se n é par, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2K$. Portanto, $n = -2(-K) = f(-K)$.

② se n é ímpar, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2K - 1$. Logo, $n = f(K)$.

Assim, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = n$ e f é sobrejetiva.

e) $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Dado $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = \begin{cases} f(0) & \text{se } n \text{ é par} \\ f(3) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 5 & \text{se } n \text{ é par} \\ 5 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} = 5$$

Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)(n) = 5$, pelo que $f \circ g$ é uma função constante. ($g \circ f$ não é uma função constante pois $(g \circ f)(1) = 3$ e $(g \circ f)(-1) = 0$)

3. (a) $Im(S) = \{1, 2, 5, 6\}$

$1 \notin Dom(R)$: de facto, $1 R b \Leftrightarrow 1 - b \geq 3 \Leftrightarrow b \leq -2 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$

$2 \notin Dom(R)$: com efeito, $2 R b \Leftrightarrow 2 - b \geq 3 \Leftrightarrow b \leq -1 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$.

$5 \in Dom(R)$ pois $5 R 2$ (uma vez que $5 - 2 \geq 3$)

$6 \in Dom(R)$ porque $6 R 2$ (uma vez que $6 - 2 \geq 3$).

Assim, $Dom(R) \cap Im(S) = \{5, 6\}$.

(b) i) R não é simétrica

$5 R 2$ (porque $5 - 2 \geq 3$)

mas $2 \not R 5$ (porque $2 - 5 \not\geq 3$)

ii) R é transitiva:

Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$ tais que aRb e bRc, temos que

$$\begin{aligned} a-c &= a+b-b-c \\ &= (a-b)+(b-c) \\ &\geq 3+3 = 6 \geq 3 \end{aligned}$$

Logo, aRc.

c) $S^{-1} = \{(5,1), (1,6), (6,3), (2,5)\}$

$(a,5) \in T \Rightarrow (a,1) \in S^{-1} \circ T$

$(a,1) \in R \Leftrightarrow a-1 \geq 3$
$\Leftrightarrow a \geq 4$

Consideremos, por exemplo,

$T = \{(4,5)\}$

Temos que $S^{-1} \circ T = \{(4,1)\} \neq \emptyset$

e $S^{-1} \circ T \subseteq R$.

4.

a) $[00]_R = \{x \in A \mid x$ tem o mesmo comprimento que $00\}$
$= \{x \in A \mid x$ tem comprimento $2\}$
$= \{00, 01, 10, 11\}$

b) $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$

Obs: $[x]_R = \{y \in A \mid y$ tem o mesmo comprimento que $x\}$.

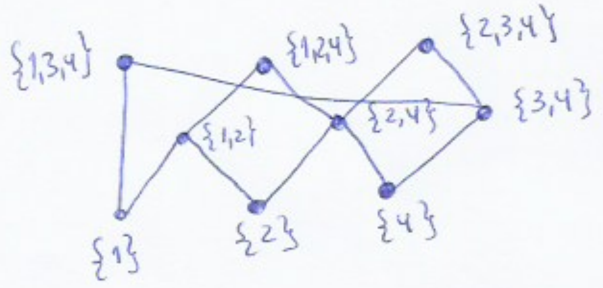
Logo, há uma classe das palavras de comprimento 1; há uma classe das palavras de comprimento 2; há uma classe das palavras de comprimento 3 e há uma classe das palavras de comprimento 4.

Assim, A/R tem 4 elementos

(podemos especificar: $[0]_R$, $[00]_R$, $[000]_R$, $[0000]_R$)

5.

(a)



(b)

i) $\mathrm{Maj}(\{\{2\},\{4\}\}) = \{\{2,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}\}$

$\sup(\{2\},\{4\}) = \{2,4\}$.

ii) $\mathrm{Min}(\{1,3,4\},\{2,3,4\}) = \{\{4\},\{3,4\}\}$

$\inf(\{1,3,4\},\{2,3,4\}) = \{3,4\}$

6. Sejam $X = \{1,2,3\}$, $S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)\}$

e $T = \{(1,1),(2,2),(3,3),(3,2)\}$.

Temos que S e T são relações de ordem parcial, mas $S \cup T$ não é antissimétrica, pelo que não é uma ordem parcial em X.

Logo, a afirmação é falsa.