Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
2017/2018

Tópicos de Matemática Discreta

exame de recurso — 1 de fevereiro de 2018 — duração: 2 horas

1. Considere as fórmulas proposicionais $\varphi : (p_0 \vee p_1) \to (p_1 \to p_0)$ e $\psi : p_0 \vee \neg p_1$.
   (a) Mostre que as fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes.
   (b) Diga, justificando, sem recorrer a tabelas de verdade, se é verdadeira ou falsa, a afirmação seguinte: Para qualquer fórmula proposicional σ, a fórmula ψ é falsa sempre que as fórmulas $\neg\sigma$ e $\varphi \to (\sigma \wedge \psi)$ são verdadeiras.

2. Considere que p e q representam as proposições a seguir indicadas

$$p : \forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}} (x + 2y = 1 \wedge 2x + 4y = 2), \quad q : \forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}} (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1).$$

   Diga, justificando, se cada uma destas proposições é verdadeira ou falsa.

3. Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 6, 7, \{1, 6, 7\}, \{3, 4\}\}$, $B = \{x + 3 \in \mathbb{Z} \,|\, 2x + 1 \in A\}$ e $C = \{1, 6, 7\}$. Justificando, determine $((A \setminus \mathcal{P}(B)) \setminus C) \times C$.

4. Diga, justificando, se para quaisquer conjuntos A, B, C e D, cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.
   (a) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.
   (b) Se $C \subseteq A$, então $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$.

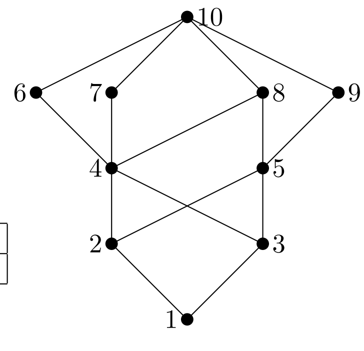
5. Prove, por indução nos naturais, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{(n+2)}{2^n}$, para todo o natural n.

6. Seja $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função definida por $f((m, n)) = \begin{cases} 2m + 1 & \text{se} \quad n > 0 \\ 0 & \text{se} \quad n = 0 \\ 2m & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$.
   (a) Determine $f(\{(0, -1), (1, 0), (0, 1)\})$ e $f^{\leftarrow}(\{1, 2\})$.
   (b) Diga, justificando, se f é invertível.
   (c) Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Para qualquer função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, a função $f \circ g$ é sobrejetiva.

7. Seja R a relação binária definida em $\mathbb{N}$ por xRy se e só se $x = 1$ ou $y = 1$.
   (a) Justifique que $R \neq \omega_A$ e $R \circ R = \omega_A$.
   (b) Diga se a relação R é transitiva. Justifique.

8. (a) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:
      i. Existe uma relação de equivalência ρ em A tal que $A/\rho = \{A \setminus \{1, 2, 3\}, \{2\}, \{1, 3\}\}$.
      ii. Existe uma relação de equivalência ρ em A tal que $[1]_\rho = A \setminus \{2, 3\}$ e $[2]_\rho = \{1, 2, 6\}$.
   (b) Seja ρ a relação de equivalência definida em $\mathbb{Z}$ por $x \,\rho\, y$ se e só se $x^2 + y^2$ é par. Determine $[-1]_\rho$ e $\mathbb{Z}/\rho$.

9. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$, onde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $\leq$ é a relação de ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse ao lado.
   (a) Indique, se existirem, os elementos minimais, o conjunto dos minorantes, o máximo e o mínimo do conjunto $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
   (b) Justifique que $(A, \leq)$ não é um reticulado.



Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
	1,5+1	1,5	1,5	1,25+1,25	1,75	1,5+1+1	1+1	1+1,25	1,5+1