Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
2017/2018

Tópicos de Matemática Discreta

exame de recurso — 1 de fevereiro de 2018 — duração: 2 horas

1. Considere as fórmulas proposicionais $\varphi : (p_0 \vee p_1) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$ e $\psi : p_0 \vee \neg p_1$.
   (a) Mostre que as fórmulas φ e ψ são logicamente equivalentes.
   (b) Diga, justificando, sem recorrer a tabelas de verdade, se é verdadeira ou falsa, a afirmação seguinte: Para qualquer fórmula proposicional σ, a fórmula ψ é falsa sempre que as fórmulas $\neg\sigma$ e $\varphi \rightarrow (\sigma \wedge \psi)$ são verdadeiras.

2. Considere que p e q representam as proposições a seguir indicadas

$$p : \forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}} (x + 2y = 1 \wedge 2x + 4y = 2), \quad q : \forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}} (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1).$$

   Diga, justificando, se cada uma destas proposições é verdadeira ou falsa.

3. Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 6, 7, \{1, 6, 7\}, \{3, 4\}\}$, $B = \{x + 3 \in \mathbb{Z} \,|\, 2x + 1 \in A\}$ e $C = \{1, 6, 7\}$. Justificando, determine $((A \setminus \mathcal{P}(B)) \setminus C) \times C$.

4. Diga, justificando, se para quaisquer conjuntos A, B, C e D, cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.
   (a) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.
   (b) Se $C \subseteq A$, então $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$.

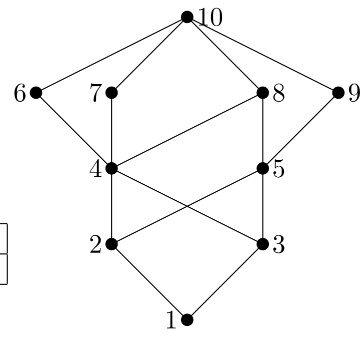
5. Prove, por indução nos naturais, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{(n+2)}{2^n}$, para todo o natural n.

6. Seja $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ a função definida por $f((m, n)) = \begin{cases} 2m + 1 & \text{se} \quad n > 0 \\ 0 & \text{se} \quad n = 0 \\ 2m & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$.
   (a) Determine $f(\{(0, -1), (1, 0), (0, 1)\})$ e $f^{\leftarrow}(\{1, 2\})$.
   (b) Diga, justificando, se f é invertível.
   (c) Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Para qualquer função $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, a função $f \circ g$ é sobrejetiva.

7. Seja R a relação binária definida em $\mathbb{N}$ por xRy se e só se $x = 1$ ou $y = 1$.
   (a) Justifique que $R \neq \omega_A$ e $R \circ R = \omega_A$.
   (b) Diga se a relação R é transitiva. Justifique.

8. (a) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:
      i. Existe uma relação de equivalência ρ em A tal que $A/\rho = \{A \setminus \{1, 2, 3\}, \{2\}, \{1, 3\}\}$.
      ii. Existe uma relação de equivalência ρ em A tal que $[1]_\rho = A \setminus \{2, 3\}$ e $[2]_\rho = \{1, 2, 6\}$.
   (b) Seja ρ a relação de equivalência definida em $\mathbb{Z}$ por $x \,\rho\, y$ se e só se $x^2 + y^2$ é par. Determine $[-1]_\rho$ e $\mathbb{Z}/\rho$.

9. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$, onde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $\leq$ é a relação de ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse ao lado.
   (a) Indique, se existirem, os elementos minimais, o conjunto dos minorantes, o máximo e o mínimo do conjunto $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
   (b) Justifique que $(A, \leq)$ não é um reticulado.



Cotações

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1,5+1	1,5	1,5	1,25+1,25	1,75	1,5+1+1	1+1	1+1,25	1,5+1

TMD
exame de recurso
1. fev 2018

1. a) φ: $(p_0 \vee p_1) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$

$\psi = p_0 \vee \neg p_1$

p_0	p_1	$p_0 \vee p_1$	$p_1 \rightarrow p_0$	φ	$\neg p_1$	ψ
1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Os valores lógicos de φ e ψ são iguais para todos os casos de valores lógicos de p_0 e p_1. Logo $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

b)? Se $\neg\sigma$ e $\varphi \rightarrow (\sigma \wedge \psi)$ são verdadeiras então ψ é falsa?

Admitamos que $\neg\sigma$ e $\varphi \rightarrow (\sigma \wedge \psi)$ são verdadeiras.
Então, σ é falsa, pelo que $\sigma \wedge \psi$ também é falsa. Logo, se $\varphi \rightarrow (\sigma \wedge \psi)$ é verdadeira, temos que φ é falsa. Apenas sabemos que σ é falsa e que φ é falsa. ψ pode ser falsa ou verdadeira

σ	φ	ψ	$\neg\sigma$	$\varphi \rightarrow (\sigma \wedge \psi)$
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

A afirmação é falsa.

2.

p: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x + 2y = 1 \wedge 2x + 4y = 2)$

Seja $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{2} \\ 2x + 4\left(\frac{1-x}{2}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{2} \\ 2x+2-2x=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-x}{2} \\ 2=2 \end{cases}$$

se $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1-x}{2} \in \mathbb{R}$

Logo, p é verdadeira

q: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x+y = 2 \wedge 2x-y=1)$

Seja $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ 2x-2+x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ 3x=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ x=1 \end{cases}$$

Para $x \neq 1$, não existe y que satisfaça $x+y=2$ e $2x-y=1$. Logo, q é F.

3. $2x+1 \in A \Leftrightarrow 2x+1 = 1 \vee 2x+1=3 \vee 2x+1=6 \vee 2x+1=7$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = \frac{5}{2} \vee x = 3$

$x=0 \Rightarrow x+3 = 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \in B$

$x=1 \Rightarrow x+3 = 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4 \in B$

$x=5/2 \Rightarrow x+3 = \frac{11}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{11}{2} \notin B$

$x=3 \Rightarrow x+3=6 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6 \in B$

Logo, $B = \{3,4,6\}$

$A \setminus \mathcal{P}(B)$ é formado pelos elementos de A que não são subconjuntos de B

$\{1,6,7\} \not\subseteq B$

$\{3,4\} \subseteq B$

Logo, $A \setminus \mathcal{P}(B) = \{1,3,6,7, \{1,6,7\}\}$

$(A \setminus \mathcal{P}(B)) \setminus C = \{1,3,6,7, \{1,6,7\}\} \setminus \{1,6,7\}$

$= \{3, \{1,6,7\}\}$

$((A \setminus \mathcal{P}(B)) \setminus C) \times C = \{(3,1), (3,6), (3,7), (\{1,6,7\},1), (\{1,6,7\},6), (\{1,6,7\},7)\}.$

4

a) F

$A = \{1\}$ $C = \{3\}$

$B = \{2\}$ $D = \{4\}$

$(A \cup B) \times (C \cup D) = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

$(A \times C) \cup (B \times D) = \{(1,3),(2,4)\}$

b) V

$x \in A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \setminus C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \cap C$

$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup C$

$C \subseteq A$

5. $\mathcal{P}(n): \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{(n+2)}{2^n}$

① $n=1$ $\quad \sum_{i=1}^{1} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2}$

$$2 - \frac{(n+2)}{2^n} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

logo $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{(n+2)}{2^n}$ para $n=1$.

② Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira, i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{(n+2)}{2^n}.$$

Temos

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{2^n}$$

$$= 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$$

logo, $\mathcal{P}(n+1)$ é verdadeira

Por ① e ②, pelo P. Indução para os naturais, $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$

6.

a) $f((0,-1)) = 2 \times 0 = 0$

$f((1,0)) = 0$

$f((0,1)) = 2 \times 0 + 1 = 1$

Logo, $f(\{(0,-1),(1,0),(0,1)\}) = \{0,1\}$

$$f^{\leftarrow}(\{1,2\}) = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : f((m,n)) = 1 \vee f((m,n)) = 2\}$$

$$f((m,n)) = 1 \Leftrightarrow (2m+1 = 1 \wedge n > 0) \vee (2m = 1 \wedge n < 0)$$

$$\Leftrightarrow (m = 0 \wedge n > 0) \vee (\underbrace{m = \tfrac{1}{2}}_{\notin \mathbb{Z}} \wedge n < 0)$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \wedge n > 0$$

$$f((m,n)) = 2 \Leftrightarrow (2m+1 = 2 \wedge n > 0) \vee (2m = 2 \wedge n < 0)$$

$$\Leftrightarrow (\underbrace{m = \tfrac{1}{2}}_{\in \mathbb{Z}} \wedge n > 0) \vee (m = 1 \wedge n < 0)$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \wedge n < 0$$

Logo $f^{\leftarrow}(\{1,2\}) = \{(0,n) : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{(1,n) : n \in \mathbb{Z}^-\}$

(b) f não é invertível pois não é injetiva.

De facto, $f((1,0)) = f((0,-1)) = 0$

e $(1,0) \neq (0,-1)$.

(c) F

Seja $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$m \longmapsto (m,0)$

$(f \circ g)(m) = f((m,0)) = 0$, que não é sobrejetiva.

7.

$x, y \in \mathbb{N}$

$x R y \Leftrightarrow x = 1$ ou $y = 1$

(a) $2 \not R 3$ pois $2 \neq 1$ e $3 \neq 1$

Logo, $R \neq \omega_{\mathbb{N}}$

$R \circ R = \{(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : (x R y \wedge y R z)\}$

$x R y \wedge y R z \Leftrightarrow (x = 1 \vee y = 1) \wedge (y = 1 \vee z = 1)$

Dado $(x,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, é verdade que

$x R 1$ e $1 R z$

Logo, $(x,z) \in R \circ R$.

Logo $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = R \circ R$, ou seja,

$R \circ R = \omega_{\mathbb{N}}$

(b) R não é transitiva.

De fato $2R1$ e $1R3$,

mas $2 \not R 3$.

8.

(a) i. V

ρ t.q. $A_\rho = \{ \{4,5,6\}, \{2\}, \{1,3\} \}$

$\rho = id_A \cup \{(4,5),(4,6),(5,4),(5,6),(6,4),(6,5),$
$(1,3),(3,1)\}$

ii. F

Se ρ é uma relação de equivalência tal que $[2]_\rho = \{1,2,6\}$, $1 \in [2]_\rho$. Assim, $1R2$, donde $2 \in [1]_\rho$.

Mas $2 \notin A \setminus \{2,3\}$.

(b)

$$[-1]_\rho = \{x \in \mathbb{Z} : x \rho -1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + (-1)^2 \text{ é par}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 1 \text{ é par}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \text{ é ímpar}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é ímpar}\}.$$

$$\mathbb{Z}/\rho = \{ [-1]_\rho, [0]_\rho \}$$

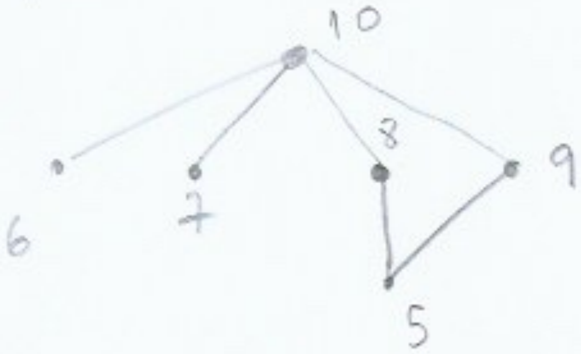
conj. inteiros ímpares

conj. dos inteiros pares

OBS: $[0]_\rho = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 0^2 \text{ é par}\} = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \text{ é par}\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é par}\}$

9.

(a)



elementos minimais: 5, 6, 7

elementos maximais: 10

$\text{Maj}(B) = \{10\}$

$\text{Min}(B) = \{2, 3, 1\}$

$\max(B) = 10$

$\nexists \min(B)$.

(b) $\text{Maj}(\{2,3\}) = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$4 \parallel 5 \Rightarrow \nexists \sup(\{2,3\}) \Rightarrow$ A não é reticulado.