1º teste
23/11/2020

Grupo I

1) F pois $\perp \in \mathcal{F}^{CP}$ e a última letra de $\perp$ não é ")" nem uma variável proposicional.

2) F

p_0	p_1	$\neg p_1$	$p_0 \wedge \neg p_1$	φ
1	1	0	0	1

3) V Temos que

$$\sigma \to \psi \Leftrightarrow \neg\sigma \vee \psi$$
$$\Leftrightarrow \neg\sigma \vee \varphi$$
$$\downarrow$$
$$\varphi \Leftrightarrow \psi$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\varphi \vee \neg\sigma}_{\text{tautologia}}$$

Logo, $\sigma \to \psi$ é tautologia.

4) F Pretendemos averiguar se

$$p(n) \text{ é } V \Rightarrow p(n+1) \text{ é } V,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Admitamos que $p(n)$ é V. Então, $3n+1$ é par.

Pretendemos verificar se $p(n+1)$ é V, ou seja, que $3(n+1)+1$ é par

Ora,

$$3(n+1)+1 = \underbrace{3n+1}_{\text{par por hipótese}} + 3$$ é ímpar por ser a soma de um par com 3.

Logo, $p(n+1)$ é F.

Assim, $p(n)$ não é hereditário.

5. **F**

$$\{b \in \mathbb{N} : 5b \text{ é ímpar}\} = \{b \in \mathbb{N} : b \text{ é ímpar}\}$$

5b é ímpar $\Leftrightarrow$ b é ímpar

$$= \{a \in \mathbb{N} : a \text{ é ímpar}\}$$

6. V

$$A = \{\emptyset, 1, 2, \{1,3\}\}$$

$$B = \{1, 2, \{1\}, 2\} = \{1, 2, \{1\}\}$$

Note-se que $|B| = \#B = 3$

nº de elementos de B

$$A \cup \{|B|\} = A \cup \{3\} = \{\emptyset, 1, 2, 3, \{1,3\}\}$$

$$\{3, \emptyset, 2, 1\} \subseteq \{\emptyset, 1, 2, 3, \{1,3\}\}$$

Grupo II

1. p_0 : 343 é divisível por 3

p_1 : A soma dos algarismos do número 343 é 10

p_2 : 10 é divisível por 3

R: $(p_1 \wedge \neg p_2) \rightarrow \neg p_0$

2. $\neg\left(\forall_{x\in A}\ (x>0 \rightarrow \forall_{y\in A}\ xy^2>0)\right)$

$\Leftrightarrow \exists_{x\in A}\ \neg\ (x>0 \rightarrow \forall_{y\in A}\ xy^2>0)$

$\Leftrightarrow \exists_{x\in A}\ \left(x>0 \wedge \neg(\forall_{y\in A}\ xy^2>0)\right)$

$\Leftrightarrow \exists_{x\in A}\left(x>0 \wedge \exists_{y\in A}\ \neg(xy^2>0)\right)$

$\Leftrightarrow \exists_{x\in A}\ \left(x>0 \wedge \exists_{y\in A}\ xy^2\leq 0\right)$

R: $\exists_{x\in A}\ (x>0 \wedge \exists_{y\in A}\ xy^2\leq 0)$

3. A, B, C subconjuntos de $\mathbb{Z}$

Escolhendo por ex. $A = \{1\}$, sabemos que pretendemos encontrar B e C tais que $1 \notin \bar{B} \cup C$, de modo a que $A \cap (\bar{B} \cup C) = \emptyset$.

Se $B = \{1\}$, $\bar{B} = \mathbb{Z} \setminus \{1\}$.

Se $C = \{2\}$, então $\bar{B} \cup C = \mathbb{Z} \setminus \{1\}$.

Portanto, uma possível resposta é

$$A = \{1\}, \ B = \{1\}, \ C = \{2\}.$$

4. $A = \{a \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} \ a = 4x\}$

$= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$

$=$ conj. dos múltiplos naturais de 4.

$A \cup B =$ conjunto dos naturais pares

$N \setminus (A \cup B) = \{a \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\}$.

Grupo III

1) $\varphi = (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)$

$\psi = (p_1 \rightarrow p_0)$

a) $\varphi \rightarrow \psi$ é tautologia se o seu valor lógico 1 para todos os casos de valores lógicos de p_0 e p_1.

Temos

p_0	p_1	$\neg p_1$	$\overset{\varphi}{p_0 \leftrightarrow \neg p_1}$	$\overset{\psi}{p_1 \rightarrow p_0}$	$\varphi \rightarrow \psi$	
1	1	0	0	1	1	
1	0	1	1	1	1	
0	1	0	1	0	0	
0	0	1	0	1	1	

Podemos comprovar, usando a tabela, que $\varphi \rightarrow \psi$ não é uma tautologia.

b) ? ψ tem valor lógico 1 $\Rightarrow$ φ tem valor lógico 1?

Podemos ver na primeira linha da tabela que ψ tem valor lógico 1 mas φ tem valor lógico 0.

Logo, não é suficiente.

2. $P: \exists_{x \in A} \forall_{y \in A} \quad x^3 y + y = 0$

<u>Em $\mathbb{R}$:</u>

$$x^3 y + y = 0 \Leftrightarrow (x^3+1)\, y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \;\vee\; y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \;\vee\; y = 0$$

a) Os valores possíveis para x seriam $-3, 0$ ou 1, sendo então $x \neq -1$, $x^3 \cdot y + y$ só será 0 para $y = 0$ e não para todo o $y \in A$.

Logo, P é falsa para $A = \{-3, 0, 1\}$

b) Para $A = \{-1\}$, P é verdadeira para A pois existe $x \in A$ $(x = -1)$ tal que para todo $y \in A$ $(y = -1)$ se verifica $x^3 y + y = 0$.

3. $p(n) =$ "$3 + 12 + 48 + \dots + 3 \times 4^n = 4^{n+1} - 1$"

① $n = 1$ $\quad 3 + \underbrace{12}_{= 3 \times 4^1} = 4^{1+1} - 1 \Leftrightarrow 15 = 16 - 1$ (V)

Logo, $p(1)$ é verdadeira.

② Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, i.e.,

$$3+12+48+\dots+3\times 4^k = 4^{k+1}-1 \quad \text{(HI)}$$

Então,

$$\underbrace{3+12+48+\dots+3\times 4^k}_{\substack{=4^{k+1}-1, \\ \text{pela HI}}} + 3\times 4^{k+1} \underset{\text{HI}}{=} (4^{k+1}-1) + 3\times 4^{k+1}$$

$$= 4^{k+1} + 3\times 4^{k+1} - 1$$

$$= 4\times 4^{k+1} - 1 = 4^{k+2}-1.$$

Logo, $p(k+1)$ é verdadeira.

Por ① e ②, pelo Princípio de Indução Estrutural para $\mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. $$(A\cup B)\cap \overline{A\cap \bar{B}} = (A\cup B)\cap(\bar{A}\cup \bar{\bar{B}})$$

$$= (A\cup B)\cap(\bar{A}\cup B)$$

$$= (A\cap \bar{A})\cup B$$

$$= \emptyset \cup B = B.$$