Universidade do Minho
Departamento de Matemática

MIEI
2020/2021

Tópicos de Matemática Discreta

2.º teste — 13 de janeiro de 2021 —— duração: 105 minutos

Nome: ______________________________ Número __________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Sendo A e B conjuntos, $(A, \emptyset)$ é um elemento de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ e de $\mathcal{P}(A \times B)$.	□	□
2.	Existem exatamente 3 relações binárias de $\{4, 5, 6\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ cuja imagem é $\{1\}$.	□	□
3.	Se uma relação binária R num conjunto não vazio A é simétrica e antissimétrica, então $R \setminus \mathrm{id}_A = \emptyset$.	□	□
4.	$\{[x - 1, x + 2[\colon x \in \mathbb{Z}\}$ é o conjunto quociente de $\mathbb{R}$ por alguma relação de equivalência em $\mathbb{R}$.	□	□
5.	Se $(A, \leq)$ é um cpo e $X \subseteq A$ tem um elemento maximal, então X tem elemento máximo.	□	□
6.	$\{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\}$ é uma aplicação sobrejetiva de $\{a, b, c, d\}$ em $\{1, 2, 3\}$.	□	□

Grupo II

Este grupo é constituído por 4 questões. Responda, sem justificar, no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Dê um exemplo de conjuntos A, B e C que não verificam a igualdade $(A \times B) \cap C = (A \cap C) \times (B \cap C)$.

   Resposta:

2. Considere os conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 8, 9, 15, 25, 49\}$ e a relação binária R em A definida, para quaisquer $x, y \in A$, por $(x, y) \in R$ quando $x^y \in B$. Dê exemplo de uma relação binária S de B para A tal que $R \circ S \neq \emptyset$ e $S^{-1} \circ R = \emptyset$.

   Resposta:

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$. Indique $[-\pi]_\rho$, onde $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = f(y)\}$ é o núcleo da função f.

   Resposta:

4. Sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $T = \{(1,2),(1,3),(3,5)\}$. Indique uma relação binária R em A tal que $R \cup T$ é uma ordem parcial em A.

   Resposta:

5. Indique $f^{\leftarrow}(\{-1,0,1,2\})$ para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

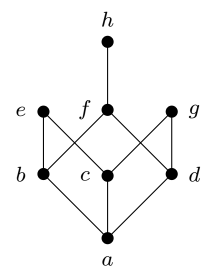
   Resposta:

Grupo III

Este grupo é constituído por 4 questões. Responda na folha de exame, justificando todas as suas respostas.

1. Seja ρ a relação de equivalência em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por: $X \rho Y$ sse $X \cap \{3\} = Y \cap \{3\}$.
   Determine:
   (a) a classe de equivalência $[\{2020, 2021\}]_\rho$;
   (b) o conjunto quociente $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\rho$.

2. Considere o cpo (A, R) com o seguinte diagrama de Hasse associado:



   (a) Determine $X = \{x \in A \ : \ dRx\}$.
   (b) Dê exemplo de, ou justifique que não existe,
      i. um elemento x de A tal que $\{b, x\}$ não admite supremo.
      ii. um subconjunto Y de A com exatamente 3 elementos minimais.
   (c) Determine o maior subconjunto Z de A tal que $a \notin Z$ e $\mathrm{Maj}(Z) = \{f, h\}$.

3. Seja $f : A \to A$ uma aplicação, seja $\mathrm{Im}(f)$ a imagem de f e seja $\mathrm{Fix}(f) = \{a \in A : f(a) = a\}$ o conjunto dos pontos fixos de f. Mostre que:
   (a) $f = f \circ f$ se e só se $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Fix}(f)$.
   (b) Se $f = f \circ f$ e f é sobrejetiva, então f é a aplicação identidade.

Cotações	I	II	III
	6	5	2,5+3,5+3