Universidade do Minho
Departamento de Matemática

MIEI
2020/2021

Tópicos de Matemática Discreta

——— Resolução do 2.º teste — 13 de janeiro de 2021 ——— duração: 105 minutos ———

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Sendo A e B conjuntos, $(A, \emptyset)$ é um elemento de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ e de $\mathcal{P}(A \times B)$.	☐	☒
2.	Existem exatamente 3 relações binárias de $\{4,5,6\}$ para $\{1,2,3,4\}$ cuja imagem é $\{1\}$.	☐	☒
3.	Se uma relação binária R num conjunto não vazio A é simétrica e antissimétrica, então $R \setminus \mathrm{id}_A = \emptyset$.	☒	☐
4.	$\{[x-1, x+2[: x \in \mathbb{Z}\}$ é o conjunto quociente de $\mathbb{R}$ por alguma relação de equivalência em $\mathbb{R}$.	☐	☒
5.	Se $(A, \leq)$ é um cpo e $X \subseteq A$ tem um elemento máximo, então X tem elemento maximal.	☒	☐
6.	$\{(a,1), (b,3), (c,2)\}$ é uma aplicação sobrejetiva de $\{a,b,c,d\}$ em $\{1,2,3\}$.	☐	☒

Grupo II

Este grupo é constituído por 5 questões. Responda, sem justificar, no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Dê um exemplo de conjuntos A, B e C que não verificam a igualdade $(A\times B)\cap C = (A\cap C)\times(B\cap C)$.

   Resposta: $A = B = C = \{1\}$

   (OBS.: Note-se que $A \times B = \{(1,1)\}$, que $(A\times B)\cap C = \{(1,1)\}\cap\{1\} = \emptyset$ e que $(A\cap C)\times(B\cap C) = \{1\}\times\{1\} = \{(1,1)\}$)

2. Considere os conjuntos $A = \{2,3,4,5\}$ e $B = \{4,8,9,15,25,49\}$ e a relação binária R em A definida, para quaisquer $x, y \in A$, por $(x,y) \in R$ quando $x^y \in B$. Dê exemplo de uma relação binária S de B para A tal que $R \circ S \neq \emptyset$ e $S^{-1} \circ R = \emptyset$.

   Resposta: $S = \{(4,5)\}$

   (OBS.: Note-se que $R = \{(2,2),(2,3),(3,2),(5,2)\}$)

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$. Indique $[\pi]_\rho$, onde $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = f(y)\}$ é o núcleo da função f.

   Resposta: $[\pi]_\rho = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = f(\pi)\} = [3,4[$

   (OBS.: Note-se que $f(\pi)$ é o maior inteiro m tal que $m \leq \pi$, ou seja, $f(\pi) = 3$. Assim, a classe de equivalfîcia de π é formada pelos reais cuja imagem por f é 3, isto é, por todos os reais x para os quais o maior inteiro menor ou igual a x é 3)

4. Sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $T = \{(1,2),(1,3),(3,5)\}$. Indique uma relação binária R em A tal que $R \cup T$ é uma ordem parcial em A.

   Resposta: $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,5)\}$

   (OBS.: Para que $R \cup T$ seja reflexiva, é necessário que $\mathrm{id}_A \subseteq (R \cup T)$. Assim, R tem de conter $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)$. Além disso, como $(1,3),(3,5) \in T$, também $(1,3),(3,5) \in R \cup T$. Para que $R \cup T$ seja transitiva, é necessário que $(1,5)$ pertença a $R \cup T$. Para a escolha de R apresentada, prova-se que $(R \cup T) \cap (R \cup T)^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$, pelo que $R \cup T$ é antissimética, e que $(R \cup T) \circ (R \cup T) \subseteq (R \cup T)$, donde $R \cup T$ é transitiva.)

5. Indique $f^{\leftarrow}(\{-1,0,1,2\})$ para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

   Resposta: $f^{\leftarrow}(\{-1,0,1,2\}) = \{-2,-1,0,1,\sqrt{2}\}$

   (OBS.: Para determinar o conjunto pretendido, temos de resolver as equações $f(x) = -1$, $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ e $f(x) = 2$. Para tal, é preciso considerar os vários ramos de f. Para resolver $f(x) = 0$, devemos resolver $x + 1 = 0$ com $x < 1$, $0 = 0$ com $x = 1$, e $x^2 = 0$ com $x > 1$. Assim, $f(x) = 0$ se e só se $x = -1$ ou $x = 1$, uma vez que $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ e $-1 < 1$, e $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, mas $0 \not> 1$. Para resolver $f(x) = 2$, devemos resolver $x + 1 = 2$ com $x < 1$, $0 = 2$ com $x = 1$, e $x^2 = 2$ com $x > 1$. Temos que $f(x) = 2$ se e somente se $x = \sqrt{2}$, uma vez que $x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$, mas $1 \not< 1$, $0 = 2$ é impossível, e $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, $\sqrt{2} > 1$ mas $-\sqrt{2} \not> 1$.)

Grupo III

Este grupo é constituído por 3 questões. Responda na folha de exame, justificando todas as suas respostas.

1. Seja ρ a relação de equivalência em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por: $X \rho Y$ sse $X \cap \{3\} = Y \cap \{3\}$.

   Determine:

   (a) a classe de equivalência $[\{2020,2021\}]_\rho$;

$$\begin{aligned} [\{2020,2021\}]_\rho &= \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \{2020,2021\} \cap \{3\} = Y \cap \{3\}\} && \text{(por def. de classe de eq.)} \\ &= \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \emptyset = Y \cap \{3\}\} && \text{(pq. } \{2020,2021\} \cap \{3\} = \emptyset) \\ &= \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : 3 \notin Y\} && \text{(pq. } Y \cap \{3\} = \emptyset \text{ sse } 3 \notin Y) \end{aligned}$$

   (b) o conjunto quociente $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\rho$.

   Por definição, $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\rho = \{[X]_\rho : X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$. Na alínea anterior, já calculámos $[X]_\rho$ para $X = \{2020,2021\}$. Calculemos agora para $X = \{3\}$.

$$\begin{aligned} [\{3\}]_\rho &= \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \{3\} \cap \{3\} = Y \cap \{3\}\} && \text{(por def. de classe de eq.)} \\ &= \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \{3\} = Y \cap \{3\}\} && \text{(pq. } \{3\} \cap \{3\} = \{3\}) \\ &= \{Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : 3 \in Y\} && \text{(pq. } Y \cap \{3\} = \{3\} \text{ sse } 3 \in Y) \end{aligned}$$

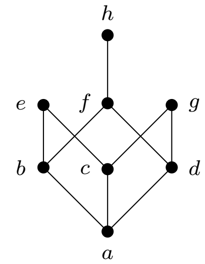
   As classes $[\{2020,2021\}]_\rho$ e $[\{3\}]_\rho$ são diferentes. Vamos agora argumentar que

$$\mathcal{P}(\mathbb{N})/\rho = \{[\{2020,2021\}]_\rho, [\{3\}]_\rho\} \ ,$$

   ou seja, as duas classes já calculadas são as únicas classes de equivalência da relação ρ. Queremos provar que: para todo $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $[X]_\rho = [\{2020,2021\}]_\rho$ ou $[X]_\rho = [\{3\}]_\rho$. Ora, dado $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, temos dois casos.

   - Primeiro caso: $3 \in X$. Então $X \rho \{3\}$, donde $[X]_\rho = [\{3\}]_\rho$.
   - Segundo caso: $3 \notin X$. Então $X \rho \{2020,2021\}$, donde $[X]_\rho = [\{2020,2021\}]_\rho$.

2. Considere o cpo (A, R) com o seguinte diagrama de Hasse associado:



(a) Determine $X = \{x \in A \; : \; dRx\}$.

Resposta: *Pelo diagrama de Hasse, sabemos que dRd, dRg, dRf e dRh.*

Sendo R uma relação reflexiva, sabemos que $(d, d) \in R$, ou seja, dRd.

Como g e f estão representados acima de d e existe um segmento a unir os pontos correspondentes a d e g e outro a unir os pontos correspondentes a d e f, podemos afirmar que dRg e dRf. Além disso, como existe um segmento a unir os pontos correspondentes a f e h, estando este último representado acima do de f, sabemos que fRh. Temos que dRf e fRh e, sendo R transitiva, dRh. Não existe mais nenhum ponto acima do correspondente a d ao qual este esteja unido por um segmento para além dos pontos correspondentes a f e g. Mais, o ponto correspondente a h é o único acima do ponto correspondente a f. Podemos, assim, concluir que os únicos elementos x de A, distintos de d, tais que dRx são f, g e h.

Logo, $X = \{d, f, g, h\}$.

(b) Dê exemplo de, ou justifique que não existe,

i. um elemento x de A tal que $\{b, x\}$ não admite supremo.

Resposta: *O único elemento x de A tal que $\{b, x\}$ não admite supremo é $x = g$.*

Sabemos que, se x é tal que xRb, então $\sup\{b, x\} = b$ e, se x é tal que bRx, então $\sup\{b, x\} = x$. Assim, para não existir $\sup\{b, x\}$, b e x têm de ser incomparáveis. Os elementos x de A tais que b e x são incomparáveis são c, d e g. Note-se que $\sup\{b, c\} = e$ e $\sup\{b, d\} = f$. Dado que $\mathrm{Maj}\{b, g\} = \emptyset$, não existe $\sup\{b, g\}$.

ii. um subconjunto Y de A com exatamente 3 elementos minimais.

Resposta: *Consideremos $Y = \{b, c, d\}$.*

Não existe nenhum elemento $x \in Y$ distinto de b tal que xRb. Logo, b é elemento minimal de Y. Como não existe nenhum elemento $x \in Y$ diferente de c tal que xRc, c é elemento minimal de Y. Finalmente, dado que não existe nenhum elemento $x \in Y$ distinto de d tal que xRd, d é elemento minimal de Y. Portanto, Y tem 3 elementos minimais.

(c) Determine o maior subconjunto Z de A tal que $a \notin Z$ e $\mathrm{Maj}(Z) = \{f, h\}$.

Resposta: *Consideremos $Z = \{b, d, f\}$.*

Para f e h serem majorantes de Z, temos de ter xRf e xRh, para todo $x \in Z$. Assim, h não pode pertencer a Z, uma vez que $h \not R f$. Dado que $e \not R h$, $c \not R h$ e $g \not R h$, e, c, g não podem pertencer a Z. Como xRf e xRh, para todo $x \in \{b, d, f\}$, podemos concluir que o maior subconjunto Z de A tal que $a \notin Z$ e $\mathrm{Maj}(Z) = \{f, h\}$ é $Z = \{b, d, f\}$.

3. Seja $f : A \to A$ uma aplicação, seja Im(f) a imagem de f e seja Fix$(f) = \{a \in A : f(a) = a\}$ o conjunto dos pontos fixos de f. Mostre que:

(a) Se $f = f \circ f$, então Im(f) = Fix(f).

Resposta: *Suponhamos que $f = f \circ f$, ou seja, que*

$$\forall_{a \in A} \quad f(a) = f(f(a)). \tag{1}$$

Queremos provar que Im(f) = Fix(f). Tal será feito por dupla inclusão.

($\subseteq$) Seja $a \in$ Im(f). Então

$$\exists_{x \in A} \quad f(x) = a. \tag{2}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(a) &= f(f(x)) && \text{por (2) e por } f \text{ ser aplicação (e portanto unívoca)} \\ &= f(x) && \text{por (1)} \\ &= a && \text{por (2),} \end{aligned}$$

donde $a \in$ Fix(f). Dado que a é um elemento qualquer de Im(f), deduz-se que Im$(f) \subseteq$ Fix(f).

($\supseteq$) Seja $a \in$ Fix(f)). Então $f(a) = a$, donde $a \in$ Im(f) pois existe algum $x \in A$ tal que $f(x) = a$. Provou-se assim que Fix$(f) \subseteq$ Im(f).

Finalmente, de Im$(f) \subseteq$ Fix(f) e Fix$(f) \subseteq$ Im(f), conclui-se que Im$(f) =$ Fix(f).

(b) Se $f = f \circ f$ e f é sobrejetiva, então f é a aplicação identidade.

Resposta: *Suponhamos que $f = f \circ f$ e que f é sobrejetiva. Pela alínea (a), de $f = f \circ f$ resulta que Im$(f) =$ Fix(f). Por outro lado, Im$(f) = A$ dado que f é sobrejetiva por hipótese. Logo Fix$(f) = A$, o que significa que*

$$\forall_{a \in A} \quad f(a) = a. \tag{3}$$

Portanto f é a aplicação identidade.

Cotações	I	II	III
	6	5	2,5+4+2,5