Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEI
2021/2022

Tópicos de Matemática Discreta

1. teste — 24 de novembro de 2021 — duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Número ____________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Não existem fórmulas do Cálculo Proposicional com mais de uma letra sem ocorrências de conectivos proposicionais.	□	□
2.	Para quaisquer fórmulas φ e ψ, se $\neg\varphi \vee \neg\psi$ é contradição, então pelo menos uma das fórmulas φ, ψ é tautologia.	□	□
3.	Se as variáveis proposicionais de índice par que ocorrem em $\varphi = (p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow (\neg p_4 \vee p_3)$ tomarem o valor lógico 0, então φ toma o valor lógico 0.	□	□
4.	O predicado $p(n)$: "n e $n+1$ são números primos", sobre os elementos n de $\mathbb{N}$, é hereditário.	□	□
5.	Se $A = \{\{2\}, \{\{2\}\}, \mathbb{N}\}$ e $B = \{2, \varnothing, \{2\}\}$, então $A \cap B = \{2, \{2\}\}$.	□	□
6.	Dado $A = \{-9, -2, 0, 5, 9\}$, os conjuntos $\{x \in A : \lvert x\rvert \in A\}$ e $\{\lvert x\rvert : x \in A\}$ são iguais.	□	□

Grupo II

Este grupo é constituído por 4 questões. Responda, sem justificar, no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Indique uma fórmula do Cálculo Proposicional φ tal que o conjunto das variáves proposicionais que ocorrem em φ é $\{p_1, p_2, p_3\}$ e que envolve apenas os conetivos $\neg$ e $\wedge$.

   Resposta:

2. Dê exemplo, em linguagem simbólica e sem recorrer ao símbolo de negação, de uma proposição equivalente à negação de $\forall_{x\in\mathbb{Z}}(x > 0 \rightarrow \exists_{y\in\mathbb{Z}}\,(y < 0 \wedge \lvert y\rvert > x))$.

   Resposta:

3. Considere os conjuntos $A = \{a \in \mathbb{R} : a^2$ é múltiplo de $4\}$ e $B = \{b \in \mathbb{Z} : |b| \geq 10\}$. Indique $(\mathbb{N} \cap A) \setminus B$.

   Resposta:

4. Dê exemplo de subconjuntos A, B e C de $\mathbb{N}$, distintos entre si, não vazios, tais que $A \cap \overline{B \cap C} = \{1\}$.

   Resposta:

Grupo III

Este grupo é constituído por 4 questões. Responda na folha de exame, justificando todas as suas respostas.

1. Considere a fórmula proposicional $\varphi : ((p_0 \to p_1) \vee (p_1 \to p_2)) \to (p_0 \to p_2)$. Diga, justificando, se são verdadeiras as seguintes afirmações:
   (a) A fórmula φ não é tautologia nem contradição.
   (b) φ toma o valor lógico 1 sempre que $p_1 \to p_2$ toma o valor lógico 0.

2. Seja p a proposição $\exists_{x \in A} \forall_{y \in A} (y < x \to x + y$ é par$)$.
   (a) Verifique se p é verdadeira para $A = \{-4, 0, 2, 3, 4, 7\}$.
   (b) Existe algum subconjunto próprio infinito A de $\mathbb{Z}$ tal que p é falsa para A? Justifique a sua resposta.

3. Prove, por indução nos naturais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$.

4. Mostre que, para quaisquer subconjuntos A, B e C de um conjunto X, $\overline{B \cup C} \cap ((A \cap B) \cup C) = \varnothing$.

Cotações	I	II	III
	6	4	3+2+3+2