Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LEI
2021/2022

Tópicos de Matemática Discreta

1. teste — 24 de novembro de 2021 —— duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Número ____________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Não existem fórmulas do Cálculo Proposicional com mais de uma letra sem ocorrências de conectivos proposicionais.	☒	☐
2.	Para quaisquer fórmulas φ e ψ, se $\neg\varphi \vee \neg\psi$ é contradição, então pelo menos uma das fórmulas φ, ψ é tautologia.	☒	☐
3.	Se as variáveis proposicionais de índice par que ocorrem em $\varphi = (p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow (\neg p_4 \vee p_3)$ tomarem o valor lógico 0, então φ toma o valor lógico 0.	☒	☐
4.	O predicado $p(n)$: "n e $n+1$ são números primos", sobre os elementos n de $\mathbb{N}$, é hereditário.	☐	☒
5.	Se $A = \{\{2\}, \{\{2\}\}, \mathbb{N}\}$ e $B = \{2, \varnothing, \{2\}\}$, então $A \cap B = \{2, \{2\}\}$.	☐	☒
6.	Dado $A = \{-9, -2, 0, 5, 9\}$, os conjuntos $\{x \in A : \lvert x\rvert \in A\}$ e $\{\lvert x\rvert : x \in A\}$ são iguais.	☐	☒

1)

Fórmulas com mais de uma letra são todas as distintas de p_i, com $i \in \mathbb{N}_0$, e de $\perp$. Logo, são de alguma das formas $\neg\varphi$, $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\to\psi$, $\varphi\leftrightarrow\psi$, pelo que têm, garantidamente, ocorrências de conectivos

2) $\neg\varphi\vee\neg\psi$ é contradição $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi\vee\neg\psi$ é sempre falsa
$\Rightarrow$ $\neg\varphi$ é sempre falsa e $\neg\psi$ é sempre falsa
$\Rightarrow$ φ é sempre verdadeira e ψ é sempre verdadeira
$\Rightarrow$ φ e ψ são tautologias

Logo, é verdade que pelo menos uma das fórmulas φ, ψ é tautologia.

3)

p_2	p_4	$p_1 \wedge p_2$	$\neg p_4 \vee p_3$	φ
0	0	0 porque p_2 é falsa	1 porque $\neg p_4$ é verdadeira	0

4) $p(n)$: n e $n+1$ são primos

$p(n)$ é hereditário se, para todo $k \in \mathbb{N}$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira.

Sabemos que $p(2)$ é verdadeira (porque 2 e 3 são primos), mas $p(3)$ é falsa (porque 3 é primo mas 4 não é)

Portanto, $p(n)$ não é hereditário.

5) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{\{2\}\}$.

($2 \in B$, mas $2 \notin A$. Logo, $2 \notin A \cap B$)

6) $\{x \in A : |x| \in A\} = \{-9, 0, 5, 9\}$

$\{|x| : x \in A\} = \{0, 2, 5, 9\}$

Grupo II

Este grupo é constituído por 4 questões. Responda, sem justificar, no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Indique uma fórmula do Cálculo Proposicional φ tal que o conjunto das variáves proposicionais que ocorrem em φ é $\{p_1, p_2, p_3\}$ e que envolve apenas os conetivos $\neg$ e $\wedge$.

   Resposta:

   $(p_1 \wedge \neg p_2) \wedge p_3$

2. Dê exemplo, em linguagem simbólica e sem recorrer ao símbolo de negação, de uma proposição equivalente à negação de $\forall_{x \in \mathbb{Z}} (x > 0 \to \exists_{y \in \mathbb{Z}} (y < 0 \wedge |y| > x))$.

   Resposta:

   $\exists_{x \in \mathbb{Z}} (x > 0 \wedge \forall_{y \in \mathbb{Z}} (y \geq 0 \vee |y| \leq x)$

OBS: $\neg(\forall_{x \in \mathbb{Z}} (x > 0 \to \exists_{y \in \mathbb{Z}} (y < 0 \wedge |y| > x)))$

$\Leftrightarrow \exists_{x \in \mathbb{Z}} \neg (x > 0 \to \exists_{y \in \mathbb{Z}} (y < 0 \wedge |y| > x))$

$\neg(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg \psi$

$\Leftrightarrow \exists_{x \in \mathbb{Z}} (x > 0 \wedge \neg \exists_{y \in \mathbb{Z}} (y < 0 \wedge |y| > x))$

$\Leftrightarrow \exists_{x \in \mathbb{Z}} (x > 0 \wedge \forall_{y \in \mathbb{Z}} \neg(y < 0 \wedge |y| > x)) \Leftrightarrow \exists_{x \in \mathbb{Z}} (x > 0 \wedge \forall_{y \in \mathbb{Z}} (y \geq 0 \vee |y| \leq x))$

3. Considere os conjuntos $A = \{a \in \mathbb{R} : a^2 \text{ é múltiplo de } 4\}$ e $B = \{b \in \mathbb{Z} : |b| \geq 10\}$. Indique $(\mathbb{N} \cap A) \setminus B$.

Resposta: a^2 é múltiplo de 4 $\Leftrightarrow$ a é múltiplo de 2 $\Leftrightarrow$ a é par

$\mathbb{N} \cap A$: conj. dos naturais pares $\quad B = \{b \in \mathbb{Z} : b \leq -10 \vee b \geq 10\}$

$(\mathbb{N} \cap A) \setminus B = \{x : x \in \mathbb{N} \cap A \wedge x \notin B\} = \{2, 4, 6, 8\}$

4. Dê exemplo de subconjuntos A, B e C de $\mathbb{N}$, distintos entre si, não vazios, tais que $A \cap \overline{B \cap C} = \{1\}$.

Resposta:

$A = \{1\}$

$B = \mathbb{N}$

$C = \{2\}$ $\qquad \overline{B \cap C} = \overline{\{2\}} = \mathbb{N} \setminus \{2\}$

$A \cap (\overline{B \cap C}) = A \cap (\mathbb{N} \setminus \{2\}) = \{1\} \cap (\mathbb{N} \setminus \{2\})$

$= \{1\}$

Grupo III

Este grupo é constituído por 4 questões. Responda na folha de exame, justificando todas as suas respostas.

1. Considere a fórmula proposicional $\varphi : ((p_0 \to p_1) \vee (p_1 \to p_2)) \to (p_0 \to p_2)$. Diga, justificando, se são verdadeiras as seguintes afirmações:

   (a) A fórmula φ não é tautologia nem contradição.

   (b) φ toma o valor lógico 1 sempre que $p_1 \to p_2$ toma o valor lógico 0.

(a)

p_0	p_1	p_2	$p_0 \to p_1$	$p_1 \to p_2$	$(p_0 \to p_1) \vee (p_1 \to p_2)$	$p_0 \to p_2$	φ
1	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1

Atendendo aos casos descritos acima, na tabela, podemos concluir que φ não é sempre verdadeira nem sempre falsa.

(b) $p_1 \to p_2$ é falsa se p_1 é verdadeira e p_2 é falsa.

Nesses casos, p_0 será verdadeira ou falsa como

Na tabela que se segue, analisamos o valor lógico de φ nesses casos.

p_0	p_1	p_2	$p_0 \to p_1$	$p_1 \to p_2$	$(p_0 \to p_1) \vee (p_1 \to p_2)$	$p_0 \to p_2$	φ
1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1

Podemos, assim, concluir que o valor lógico de φ pode ser 0 quando $p_1 \to p_2$ tem valor lógico 0. A afirmação é falsa.

2. Seja p a proposição $\exists_{x \in A} \forall_{y \in A} (y < x \to x + y$ é par$)$.
   - (a) Verifique se p é verdadeira para $A = \{-4, 0, 2, 3, 4, 7\}$.
   - (b) Existe algum subconjunto próprio infinito A de $\mathbb{Z}$ tal que p é falsa para A? Justifique a sua resposta.

(a) Seja $x = -4$

Considere-mos $y \in A$.

$y < x$ é falsa (pois não existe nenhum elemento em A menor que -4)

Logo, $y < x \to x + y$ é par é verdadeira

Portanto, $\exists_{x \in A} \forall_{y \in A} (y < x \to x + y$ é par$)$ é verdadeira.

(OBS: tb poderíamos tomar $x = 0$ ou $x = 2$, pois os valores de $y \in A$ tais que $y < 0$ ou $y < 2$ são pares e, por isso, somados com 0 ou com 2 dá um nº par)

(b) $A = \mathbb{Z}^-$, por exemplo.
Note-se que $A \subseteq \mathbb{Z}$ mas $A \neq \mathbb{Z}$ (por isso, é um subconjunto próprio de $\mathbb{Z}$)

Além disso, se existisse um elemento $x \in A$ tal que, para todo $y \in A$, se $y < x$, então $x+y$ é par, teríamos, para $y = x-1$, $x+(x-1)$ par e, para $y = x-2$, $x+(x-2)$ par. Mas $x+(x-1)$ e $x+(x-2)$ são números consecutivos, não podendo ambos ser pares (OBS: $x-1 \in \mathbb{Z}^-$, $x-2 \in \mathbb{Z}^-$, $x-1<x$ e $x-2<x$).

3. Prove, por indução nos naturais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{2^n \leq 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1.}$

$p(n)$

(I) $n=1$

$$2^n \leq 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$$
$$\Leftrightarrow 2^1 \leq 2^{1+1} - 2^{1-1} - 1$$
$$\Leftrightarrow 2 \leq 4 - 1 - 1 \quad \text{P.V.}$$

Logo, $p(1)$ é verdadeira.

(II) Seja $k \in \mathbb{N}$ t.q. $p(k)$ é V. Então,

$$\boxed{2^k \leq 2^{k+1} - 2^{k-1} - 1} \text{ — HI}$$

Logo, $2^{k+1} = 2 \times 2^k \underset{\text{HI}}{\leq} 2 \times (2^{k+1} - 2^{k-1} - 1)$
$$= 2^{k+2} - 2^k - 2$$
$$< 2^{k+2} - 2^k - 1 = 2^{(k+1)+1} - 2^{(k+1)-1} - 1$$

Assim, $p(k+1)$ é verdadeira.

Por (I) e (II), pelo Princípio da Indução em $\mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Mostre que, para quaisquer subconjuntos A, B e C de um conjunto X, $\overline{B \cup C} \cap ((A \cap B) \cup C) = \varnothing$.

$$
\begin{aligned}
\overline{B \cup C} \cap ((A \cap B) \cup C) &= (\overline{B} \cap \overline{C}) \cap ((A \cap B) \cup C) \\
&= (\overline{B} \cap \overline{C} \cap (A \cap B)) \cup (\overline{B} \cap \overline{C} \cap C) \\
&= (A \cap (B \cap \overline{B}) \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap (C \cap \overline{C})) \\
&= \varnothing \cup \varnothing = \varnothing .
\end{aligned}
$$