Universidade do Minho | LEI
Departamento de Matemática | 2021/2022

Tópicos de Matemática Discreta

2.º teste — 19 de janeiro de 2022 — duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Número __________

Grupo I

Este grupo é constituído por 6 questões. Em cada questão, deve dizer se a afirmação indicada é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando o respetivo quadrado. Em cada questão, a cotação atribuída será *1 valor*, *-0,25 valores* ou *0 valores*, consoante a resposta esteja certa, errada, ou não seja assinalada resposta, respetivamente. A cotação total neste grupo é no mínimo *0 valores*.

		V	F
1.	Sendo A e B os conjuntos $A = \{\emptyset, 2, \{1, 2\}\}$ e $B = \{0, 2, \vert\{\emptyset\}\vert, \{1\}\}$, o conjunto $A \cap \mathcal{P}(B)$ tem 2 elementos. **Obs.** Dado um conjunto X, $\vert X\vert$ denota o cardinal de X.	□	□
2.	Para quaisquer conjuntos A, B e C, $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$.	□	□
3.	A família de conjuntos $\Big\{\{x \in \mathbb{Z} : x < -100 \vee x > 100\}, \{x \in \mathbb{Z} : \vert x\vert \leq 100\}\Big\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.	□	□
4.	A relação binária R em $\mathbb{Z}$ definida por $x\,R\,y$ se e só se $\vert x\vert = \vert y\vert$ é uma relação reflexiva e antissimétrica.	□	□
5.	Existe uma relação de equivalência R em $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N}/R = \{\mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$.	□	□
6.	A relação binária em $A = \{0, 1, 2\}$ definida por $R = \{(0, 2), (2, 0), (1, 2), (2, 1)\}$ é uma função de A em A.	□	□

Grupo II

Este grupo é constituído por 5 questões. Responda, <u>sem justificar</u>, no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Dê exemplos de dois conjuntos A e B, distintos e não vazios, tais que $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset$.

   Resposta:

2. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{5\}\}$ e a relação binária W de A em B formada pelos pares (a, X) tais que $a \in X$. Indique $W^{-1} \circ W$.

   Resposta:

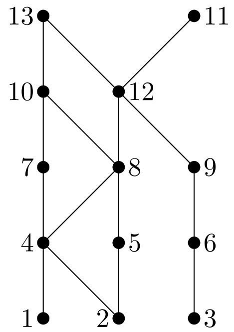
3. Seja S a relação binária em $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definida por $S = \{(3, 1), (1, 2), (3, 3), (1, 3), (4, 6), (5, 6)\}$. Indique a menor relação binária em A que contém S e é uma relação de equivalência.

   Resposta:

4. Considere o c.p.o. (A, R), onde $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq 13\}$ e R é a relação de ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse seguinte.

   Indique $R \cap \{(2,2),(2,3),(3,6),(5,7),(8,4),(9,13),(10,8)\}$.

   Resposta:



5. Considere o c.p.o. (A, R) definido na questão 4 e o subconjunto $X = \{4, 5, 6\}$ de A. Indique o conjunto dos majorantes de X e, caso exista, o supremo de X.

   Resposta:

Grupo III

Este grupo é constituído por 3 questões. Responda na folha de exame, justificando todas as suas respostas.

1. Seja ρ a relação de equivalência definida em $\mathbb{R}$ por $x \,\rho\, y$ se e só se $x - y \in \mathbb{Z}$.
   (a) Mostre que a relação ρ é, efetivamente, transitiva.
   (b) Determine $[0]_\rho$.
   (c) Dê exemplo de elementos $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ tais que $a \neq b$ e $[a]_\rho = [b]_\rho = [\frac{1}{2}]_\rho$.

2. Considere o c.p.o. $(B, \preceq)$, onde $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $\preceq$ é a relação definida por
$$a \preceq b \iff a = b \vee |a| < |b|.$$
   (a) Apresente o diagrama de Hasse deste c.p.o..
   (b) Verifique que o c.p.o. dado não é um reticulado.

3. Considere as funções
$$\begin{aligned} g:\ \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto -n \end{aligned}$$
   e $f:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida por
$$f(n) = \begin{cases} 2 - 2n & \text{se } n < 1 \\ 2n - 1 & \text{se } n \geq 1 \end{cases}.$$
   (a) Determine $f(\{-3, 0, 1, 2\})$ e $f^{\leftarrow}(\{k \in \mathbb{N} \ :\ k \text{ é par}\})$.
   (b) Determine $g \circ f$.
   (c) Diga se a relação inversa de g é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}$. Justifique a sua resposta.

Cotações	I	II	III
	6	5	3+3+3

Grupo I

1. V

$A = \{\emptyset, 2, \{1,2\}\}$

$B = \{0, 2, |\{\emptyset\}|, \{1\}\}$

$\emptyset \subseteq B$. Logo, $\emptyset \in \mathcal{P}(B)$. Como $\emptyset \in A$, $\emptyset \in A \cap \mathcal{P}(B)$.

O outro elemento de A que é um conjunto é $\{1,2\}$.

Temos que $B = \{0, 2, 1, \{1\}\}$ pois $\{\emptyset\}$ tem 1 elemento.

Assim, $\{1,2\} \subseteq B$ e, portanto, $\{1,2\} \in \mathcal{P}(B)$.

Logo, $A \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1,2\}\}$ tem 2 elementos.

2. F

Consideremos $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ e $C = \{3\}$.

Temos $(A \times B) \cup C = \{(1,2)\} \cup \{3\} = \{(1,2), 3\}$

e $(A \cup C) \times (B \cup C) = \{1,3\} \times \{2,3\} = \{(1,2), (1,3), (3,2), (3,3)\}$

Assim, $(A \times B) \cup C \neq (A \cup C) \times (B \cup C)$.

3. V $F_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x < -100 \vee x > 100\} = (]-\infty, -100[\cup]100, +\infty[) \cap \mathbb{Z}$

$F_2 = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 100\} = [-100, 100] \cap \mathbb{Z}$

$F_1 \cup F_2 = \mathbb{Z}$

$F_1 \cap F_2 = \emptyset$

$F_1 \neq \emptyset$, $F_2 \neq \emptyset$ Assim, $\{F_1, F_2\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

4. F $x R y \Leftrightarrow |x| = |y|$

$\forall x \in \mathbb{Z}$, $|x| = |x|$. Logo, $\forall x \in \mathbb{Z}, x R x$ e R é reflexiva.

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $x R y$ e $y R x \Leftrightarrow |x| = |y|$ e $|y| = |x| \Leftrightarrow x = \pm y$

Temos: $3 R -3$ e $-3 R 3$, mas $3 \neq -3$. R não é antissimétrica.

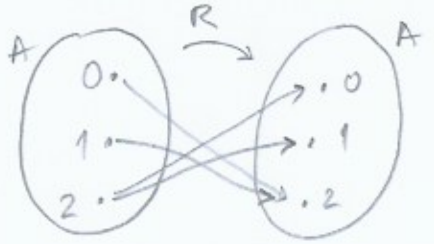
5. F

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{N}\setminus\{1\} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{N}\setminus\{1\} = \mathbb{N}\setminus\{1\} \neq \emptyset$$

Logo, $\{\mathbb{N}, \mathbb{N}\setminus\{1\}\}$ não é uma partição de $\mathbb{N}$, pelo que não existe uma tal relação de equivalência R em $\mathbb{N}$.

6. F



R não é uma função de A em A pois $2R0$ e $2R1$, pelo que R não é unívoca.

Grupo II

1. $A, B \neq \emptyset$ t.q. $A \neq B$ e $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset$

$A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$. Temos que $A \neq B$, $A \times B = \{(1,1),(2,1)\}$ e $B \times A = \{(1,1),(1,2)\}$, pelo que

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(1,1)\} \neq \emptyset$$

2. $W = \{(1,\{1,2\}), (1,\{1,3,4\}), (2,\{1,2\}), (3,\{1,3,4\}), (4,\{1,3,4\}), (5,\{5\})\}$

$W^{-1} \circ W = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3),(4,4),(5,5)\}$

3.

$$id_A \cup S \cup \{(2,3),(3,2),(2,1),(4,5),(5,4),(6,4),(6,5)\}$$

4. $R \cap \{(2,2), (2,3), (3,6), (5,7), (8,4), (9,13), (10,8)\} =$
$= \{(2,2), (3,6), (9,13)\}$

$2R2 \Rightarrow (2,2) \in R$ $\qquad$ $5 \| 7 \Rightarrow (5,7) \notin R$

$2 \| 3 \Rightarrow (2,3) \notin R$ $\qquad$ $4R8 \Rightarrow 8 \not R 4 \Rightarrow (8,4) \notin R$

$3R6 \Rightarrow (3,6) \in R$ $\qquad$ $9R12 \wedge 12R13 \Rightarrow 9R13 \Rightarrow (9,13) \in R$

$(10,8) \notin R$ pois $10 \not R 8$ ($8R10$ e $(8,10) \in R$).

5. $\text{Maj}(\{4,5,6\}) = \{12, 11, 13\}$

$\sup(X) = 12$ pois $12R13$ e $12R11$
(é o menor dos majorantes para a relação R)

Grupo III

1.

a) Sejam $x,y,z \in \mathbb{R}$ tais que $x\rho y$ e $y \rho z$.
Então, $x-y \in \mathbb{Z}$ e $y-z \in \mathbb{Z}$.
Assim, $(x-y)+(y-z) \in \mathbb{Z}$, ou seja, $x-z \in \mathbb{Z}$,
i.e. $x\rho z$.

Mostrámos que $\forall x,y,z \in \mathbb{R}\ ((x\rho y \wedge y\rho z) \rightarrow x\rho z)$.
Portanto, ρ é transitiva.

b) $[0]_\rho = \{x \in \mathbb{Z} : x\rho 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : x - 0 \in \mathbb{Z}\}$
$= \{x \in \mathbb{Z} : x \in \mathbb{Z}\}$
$= \mathbb{Z}$.

c) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \in \mathbb{Z}$, pelo que $\frac{3}{2} \rho \frac{1}{2}$.
$\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{Z}$, donde $\frac{5}{2} \rho \frac{1}{2}$.

Portanto, $[3/2]_\rho = [5/2]_\rho = [1/2]_\rho$.

$a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{5}{2}$

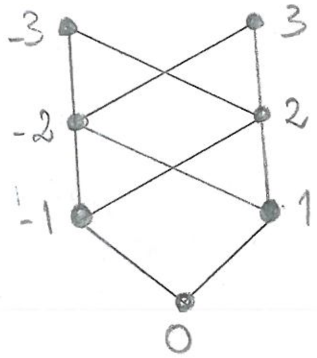
2.

$\precsim \; = id_B \cup \{ (-2,-3), (-2,3), (-1,-3), (-1,-2), (-1,2),$
$(-1,3), (0,-3), (0,-2), (0,-1), (0,1), (0,2), (0,3),$
$(1,-3), (1,-2), (1,2), (1,3), (2,-3), (2,3) \}$

a)

Obs: $-2 \not\precsim 2$ e $2 \not\precsim -2$ $\qquad 2 \parallel -2$
$-3 \not\precsim 3$ e $3 \not\precsim -3$ $\qquad 3 \parallel -3$
$-1 \not\precsim 1$ e $1 \not\precsim -1$ $\qquad 1 \parallel -1$

diagrama de Hasse de $(B,\precsim)$:



b) $\nexists \sup(\{-1,1\})$. De facto, $Maj(\{-1,1\}) = \{-2,2,-3,3\}$,
mas $-2 \parallel 2$.

3. (a) $f(\{-3,0,1,2\}) = \{f(-3), f(0), f(1), f(2)\}$
$= \{2-2(-3), 2-2\times 0, 2\times 1-1, 2\times 2-1\}$
$= \{8, 2, 1, 3\}$

$f^{\leftarrow}(\{k\in \mathbb{N} : k \text{ é par}\}) = \mathbb{Z}_0^-$ pois
se $n<1$, $f(n) = 2-2n = 2(1-n)$, que é par,
e se $n\geq 1$, $f(n) = 2n-1$, que é ímpar.

Portanto, $f(k)$ é par só se $k \in \mathbb{Z}$ é tal que $k < 1$.

(b) $g \circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = \begin{cases} g(2-2n) & \text{se } n<1 \\ g(2n-1) & \text{se } n \geq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2n-2 & \text{se } n<1 \\ 1-2n & \text{se } n \geq 1 \end{cases}.$$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = -n \in \mathbb{Z}^-$.

Logo, $\nexists n \in \mathbb{N} : g(n) = 1$, donde $\nexists n \in \mathbb{N} : (n,1) \in g$.

Portanto, $\nexists n \in \mathbb{N} : (1,n) \in g^{-1}$, pelo que $Dom(g^{-1}) \neq \mathbb{Z}$.

e g^{-1} não é uma função.