TMD
2º teste
11/01/2022

Grupo I

1. F

$$B \setminus A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$$
$$= \{1, \emptyset\}$$

A tem 3 elementos: $\{1\}$
$\{\{1\}\}$
e $\mathbb{Z}$

Note-se que $1 \notin A$ e $\emptyset \notin A$, mas $\{1\} \in A$.

2. F

Consideremos, por exemplo, $A = \{1\}$ e $n = 2$.
Temos que

$$A^2 = A \times A = \{(1,1)\},$$

pelo que $\mathcal{P}(A^2) = \{\emptyset, \{(1,1)\}\}$.

Por outro lado, $(\mathcal{P}(A))^2 = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$

$$= \{\emptyset, \{1\}\} \times \{\emptyset, \{1\}\}$$
$$= \{(\emptyset,\emptyset), (\emptyset,\{1\}), (\{1\},\emptyset), (\{1\},\{1\})\}.$$

3. V

Se $x \in \mathbb{Z}$, é claro que $x+1 \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\{x \in A : x+1 \in A\} = \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, $\{x+1 : x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$

Portanto,
$$\{x \in A : x+1 \in A\} = \{x+1 : x \in A\}$$

quando $A = \mathbb{Z}$.

4. V $\mathcal{F} = \{[-r,r] : r \in \mathbb{R}^+\}$

Note-se que $[-2,2] \cap [-1,1] \neq \emptyset$.
Logo, os blocos da família $\{[-r,r] : r \in \mathbb{R}^+\}$ não são disjuntos e, portanto, $\mathcal{F}$ não é uma partição de $\mathbb{R}$.

5. V

Seja $m = \max(X)$. Então, $m \in X$ e $\forall_{x \in X}\ x \leq m$.
Logo, m é um elemento maximal de X. Suponhamos que existe um (outro) elemento y que é maximal de X. Então, $\nexists x \in X : (y \leq x \wedge y \neq x)$. Mas, como $m = \max(X)$, $y \leq m$, pelo que $y = m$.

6. F

Consideremos, por exemplo, $A = \{1,2\}$ e $R = \{(1,1)\}$
Temos que $id_A = \{(1,1),(2,2)\}$. Logo, R é simétrica, antissimétrica e distinta de id_A.

Grupo II

1.

$$\begin{aligned} A &= \{a \in \mathbb{Z} : 3a \text{ é divisível por } 6\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} : 3a = 6k \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} : a = 2k \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} : a \text{ é par}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{b \in \mathbb{Z} : b - 3 \leq 5\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z} : b \leq 8\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \setminus A &= \{b \in \mathbb{Z} : b \leq 8\} \setminus \{a \in \mathbb{Z} : a \text{ é par}\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z} : b \leq 8 \text{ e } b \text{ não é par}\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z} : b \leq 8 \text{ e } b \text{ é ímpar}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \cap (B \setminus A) &= \{b \in \mathbb{N} : b \leq 8 \text{ e } b \text{ é ímpar}\} \\ &= \{1, 3, 5, 7\} \end{aligned}$$

2. $S^{-1} = \{(1,3), (3,3), (2,4)\}$

$R = \{(1,4), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

$\hookrightarrow$

$$\begin{aligned} (1,b) \in R &\Leftrightarrow 1 + b > 4 \Leftrightarrow b > 3 \\ (2,b) \in R &\Leftrightarrow 2 + b > 4 \Leftrightarrow b > 2 \\ (3,b) \in R &\Leftrightarrow 3 + b > 4 \Leftrightarrow b > 1 \end{aligned}$$

Assim, $R \circ S^{-1} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

3.

$$(1,4),\ (3,2),\ (4,3) \in R.$$

$$\left.\begin{array}{l}(1,4)\in R \wedge (4,3)\in R\\ R \text{ transitiva}\end{array}\right\} \Longrightarrow (1,3)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(1,3)\in R \wedge (3,2)\in R\\ R \text{ transitiva}\end{array}\right\} \Longrightarrow (1,2)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(4,3)\in R \wedge (3,2)\in R\\ R \text{ transitiva}\end{array}\right\} \Longrightarrow (4,2)\in R$$

Seja $R = \{(1,4), (3,2), (4,3), (1,3), (1,2), (4,2)\}$

Temos que $R \cap R^{-1} = \emptyset$ e $R \circ R = \{(1,2), (1,3), (4,2)\} \subseteq R$

Logo, R é transitiva e antissimétrica.

4. $A/_R = \{\{a,d\}, \{b,c\}\} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b)\}$$

$$[a]_R = [d]_R$$
$$\neq$$
$$[b]_R = [c]_R$$

Grupo III

1. Seja $(x,y) \in (A\times C)\setminus(B\times C)$. Temos que

$(x,y) \in A\times C \wedge (x,y) \notin B\times C$.

Ora,

$$\begin{aligned}(x,y)\in A\times C \wedge (x,y)\notin B\times C &\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in C)\wedge(x\notin B \vee y\notin C)\\ &\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B)\\ &\quad\vee (x\in A\wedge y\in C\wedge y\notin C)\\ &\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B\\ &\Leftrightarrow x\in A\setminus B \wedge y\in C\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in (A\setminus B)\times C.\end{aligned}$$

Portanto,
$$(A\times C)\setminus(B\times C)=(A\setminus B)\times C.$$

2.

(a) Seja $a\in A$

$a R a \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}: \ a=a\times 10^n$, o que é verdade:

basta considerar $n=0$
$$a=a\times 10^0$$

Portanto, aRa, para todo $a\in A$, donde R é ~~transitiva~~ reflexiva.

(b) Sabemos que $[a]_R\cap[10]_R=\emptyset$ se e só se $a \not R\, 10$, i.e. sse não existe $n\in\mathbb{Z}$ tal que
$$a=10\times 10^n$$

Logo, $a\not R\,10$ sse não existe $n\in\mathbb{Z}$ tal que
$$a=10^{n+1}.$$

Basta escolher a que não seja uma potência de 10.
Considere-se $a=5$.

OBS :

$$[5]_R = \{5, 50, 500\}$$

$$[10]_R = \{10, 100, 1000\}$$

(c)

$$A/R = \{[a]_R : a \in A\}$$

$$[5]_R = \{b \in A : \exists n \in \mathbb{Z} \quad b = 5 \times 10^n\}$$

$$= \{5, 50, 500\} = [50]_R = [500]_R$$

$\downarrow$

$5 = 5 \times 10^0 \quad (n = 0)$

$50 = 5 \times 10^1 \quad (n = 1)$

$500 = 5 \times 10^2 \quad (n = 2)$

$$[10]_R = \{b \in A : \exists n \in \mathbb{Z} : b = 10 \times 10^n\}$$

$$= \{b \in A : \exists n \in \mathbb{Z} : b = 10^{n+1}\}$$

$$= \{10, 100, 1000\} = [100]_R = [1000]_R$$

$\downarrow$

$10 = 10 \times 10^0$; $100 = 10 \times 10^1$; $1000 = 10 \times 10^2$

$$[1500]_R = \{b \in A : \exists n \in \mathbb{Z} : b = 1500 \times 10^n\}$$

$$= \{1500\}$$

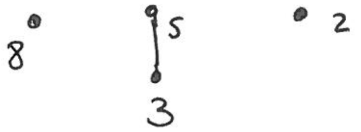
$\downarrow$

$1500 = 1500 \times 10^0$

$$A/R = \{\{10, 100, 1000\}, \{5, 50, 500\}, \{1500\}\}$$

3.

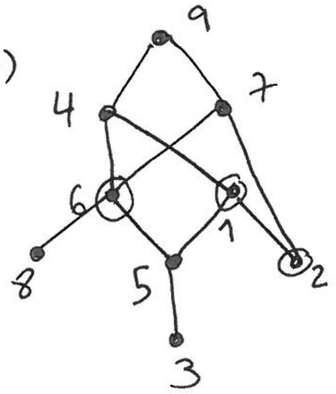
(a) $X = \{2,3,5,8\}$



elementos minimais : 2, 3, 8

elementos maximais : 2, 5, 8

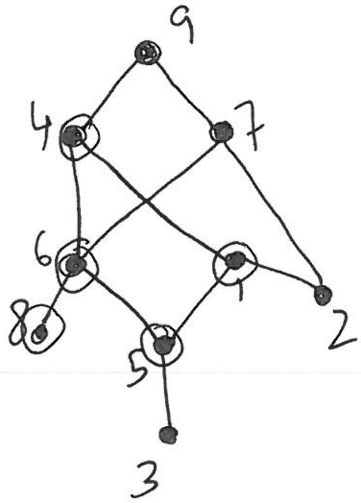
(b)



$Y = \{1,2,6\}$

$\text{Maj}(Y) = \{4,9\}$

(c)



$Z = \{1,4,5,6,8\}$

$\text{Maj}(Z) = \{4,9\}$

Logo, $\sup(Z) = 4$

menor dos majorantes $(4 \leq 9)$

(d)

$6 \,//\, 2$

$\nexists \inf\{2,6\}$ pois $\text{Min}(\{2,6\}) = \emptyset$

Logo, o c.p.o. (A, R) não é um reticulado.

(OBS: Num reticulado, para quaisquer x, y, existe $\sup\{x,y\}$ e existe $\inf\{x,y\}$.)